СБОРНИКЪ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ
СЪ ПРИМѢНЕНІЕМЪ ТРИГОНОМЕТРІИ
ДЛЯ УЧЕНИКОВЪ ГИМНАЗІЙ и РЕАЛЬНЫХЪ УЧИЛИЩЪ.

(Примѣнительно къ правиламъ объ испытаніяхъ учениковъ, утвержденнымъ г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія 12-го Марта 1891 года).

Составилъ Н. Сорокинъ,

Преподаватель Кіево-Печерской гимназіи.

ИЗДАНІЕ ШЕСТОЕ,

перепечатанное съ четвертаго, **одобреннаго** Ученымъ Комитетомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія для старшихъ классовъ гимназій и реальныхъ училищъ.

Складъ изданія въ Кіевѣ В. А. Профильниченка въ Кіевѣ

КІЕВЪ.
Типографія И. И. Чоколова, Фундуклеевская улица, домъ № 22.
1900.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

Дозволено цензурою. Кіевъ, 30 Мая 1900 года.

Предисловіе къ четвертому изданію.

Согласно § 57 правилъ, утвержденныхъ г. Министромъ Народнаго Просвѣщенія 12 Марта 1891 года, для письменнаго испытанія зрѣлости по геометріи требуется къ геометрической задачѣ присоединить: *«такія данныя и условія, которыя дали бы возможность ученику обнаружить умѣнье вводить въ выкладки тригонометрическія функціи, пользоваться тригонометрическими таблицами и рѣшать треугольники»*.

Этимъ требованіемъ опредѣляется и характеръ годичныхъ занятій по тригонометріи и отношеніе тригонометріи къ геометріи. Дѣйствительно, по справедливости, тригонометрію можно разсматривать какъ одинъ изъ методовъ приложенія алгебраическаго анализа къ геометріи. Хотя первичная цѣль этого метода и заключается въ рѣшеніи треугольниковъ, но, такъ какъ треугольникъ представляетъ простѣйшую фигуру, на которую разлагается всякая другая сложная, то поэтому всякій вопросъ геометріи доступенъ рѣшенію тригонометрическимъ методомъ, конечно, если этотъ методъ въ данномъ случаѣ окажется простѣйшимъ. Общность же и богатство преобразованій, вносимыя въ тригонометрію алгебраическимъ элементомъ, дѣлаютъ тригонометрію методомъ неотъемлемымъ при рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ и задачъ.

Ученикъ, приступая впервые къ рѣшенію тригонометріей геометрическихъ задачъ, не знаетъ, гдѣ и какъ воспользоваться свойствомъ входящихъ въ условіе тригонометрическихъ функцій, гдѣ связь между геометрическими и тригонометрическими данными, *«какъ вводить въ выкладки тригонометрическія функціи»*, одними словомъ, какова роль тригонометріи, какъ вспомогательнаго средства для изслѣдованія и рѣшенія геометрическихъ вопросовъ. Съ другой стороны, практика показываетъ, что, такъ какъ тригонометрія проходится отдѣльно отъ геометріи, и въ задачахъ тригонометрическихъ обыкновенно входятъ данными или искомыми преимущественно углы, то это невольно рождаетъ въ умахъ учениковъ предубѣжденіе, что тригонометрія наука отдѣльная, не имѣющая ничего общаго съ геометріей. Понятно, всегда во время надо придти ученику на

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

помощь, разъяснить истинное отношение тригонометріи къ геометріи и показать, что тригонометрія есть только методъ при рѣшеніи и анализѣ геометрическихъ вопросовъ. Въ этомъ и состоитъ, по нашему мнѣнію, смыслъ требованія § 57 правилъ объ испытаніяхъ по геометріи, которое возводитъ тригонометрію на ея настоящее мѣсто.

По нашему крайнему убѣжденію необходимо и весьма полезно начинать въ гимназіяхъ рѣшеніе тригонометріей геометрическихъ задачъ въ 7 классѣ во второй половинѣ учебнаго года, когда тригонометрія теоретически пройдена, ибо при рѣшеніи подобныхъ задачъ, съ одной стороны постепенно, безъ ощутительной затраты времени, повторяются основныя теоремы геометріи, а съ другой стороны ученикъ пріучается примѣнять и алгебраическій анализъ въ рѣшеніи геометрическихъ вопросовъ, а это незамѣнимо возвышаетъ трудъ преподавателя въ занятіяхъ съ учениками.

Что же касается учениковъ реальныхъ училищъ, то и ихъ при повтореніи курса геометріи и тригонометріи не безполезно будетъ ознакомить съ задачами геометрически-тригонометрическаго характера, ибо рѣшеніе этихъ задачъ, приводя къ должной цѣли, потребуетъ менѣе времени, чѣмъ отдѣльное рѣшеніе задачъ на вычисленіе по геометріи и по тригонометріи.

Предлагаемое 4-е изданіе Сборника задачъ Планиметріи и Стереометріи представляетъ, по нашему мнѣнію, достаточный матеріалъ для упражненій учениковъ въ рѣшеніи и анализѣ различныхъ геометрическихъ вопросовъ.

Такъ какъ 2-е и 3-е изданія Сборника удостоены были одобренія Ученаго Комитета Министерства Народнаго Просвѣщенія, а всѣ три полныхъ изданія разошлись въ два года, то эти два обстоятельства поселили въ насъ увѣренность, что своимъ слабымъ трудомъ мы можемъ оказать посильную помощь учащимся. Однако желаніе улучшить Сборникъ въ настоящемъ изданіи заставило насъ исправить неточности предыдущаго изданія, прибавить 60 новыхъ задачъ, ввести въ нѣкоторыя задачи 3-го изданія числовыя данныя и распредѣлить всѣ задачи по отдѣламъ курса Геометріи.

Полагая, что ознакомленіе съ тѣлами вращенія благотворно дѣйствуетъ на развитіе учениковъ, мы сочли необходимымъ болѣе подробно и систематично развить то, что было отрывочно изложено во 2-мъ и 3-мъ изданіяхъ, и выдѣлить въ отдѣльную статью ученіе о поверхностяхъ и объемахъ тѣлъ вращенія. Отдѣлъ V Сборника представляетъ разнообразный и достаточный матеріалъ (85 задачъ) для примѣненія предложеній этой статьи.

Н. Сорокинъ.

Планиметрія.

Отдѣлъ I.

Измѣреніе линій и угловъ.

1. Средняя линія равнобочной трапеціи проходитъ черезъ вершину правильнаго треугольника, построеннаго на меньшемъ основаніи трапеціи. Опредѣлить углы трапеціи и отношеніе средней линіи къ боку, если бо́льшее основаніе вдвое болѣе бока.

2. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена равнодѣлящая прямого угла, пересѣкающая гипотенузу въ точкѣ L. Опредѣлить разстояніе точки L до катетовъ, если острый уголъ треугольника x, а радіусъ круга, описаннаго около треугольника, R.

3. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена равнодѣлящая остраго угла x. Опредѣлить радіусъ круга описаннаго, если длина линіи, соединяющей середину равнодѣлящей съ вершиной прямого угла, есть l.

4. Въ кругѣ радіуса r вписанъ косоугольный треугольникъ, у котораго одна сторона вдвое болѣе другой, а уголъ между ними x; опредѣлить отрѣзки, образуемые на третьей сторонѣ биссекторомъ угла x.

5. Опредѣлить периметръ равнобочной трапеціи, описанной около круга, если бо́льшее основаніе a, а острый уголъ x.

6. Въ равнобочной трапеціи изъ вершины остраго угла β проведена діагональ, которая пересѣкаетъ бокъ подъ угломъ x. Опредѣлить длину равнодѣлящей угла x и тѣ отрѣзки, на которые она дѣлитъ бо́льшее основаніе a.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

7. Въ кругъ радіуса $r=3{,}5$ м. вписана трапеція, у которой бокъ равенъ меньшему основанію, а уголъ $x=25°18'36''$. Опредѣлить периметръ трапеціи.

8. Въ кругъ вписана трапеція, у которой бокъ c равенъ меньшему основанію, а одинъ изъ угловъ $60°$. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, сторонами котораго служатъ діагональ трапеціи, бокъ и бо́льшее основаніе.

9. Изъ точки A, взятой внѣ круга O, проведены сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ, и касательная AB, которая вдвое больше внѣшней части сѣкущей. Опредѣлить отношеніе радіусовъ круговъ, описанныхъ около $\triangle\triangle$ DOB и BOC.

10. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая, проходящая черезъ центръ, и касательная; опредѣлить, подъ какимъ угломъ къ касательной надо провести изъ центра линію, дѣлящую ее изъ крайнемъ и среднемъ отношеніи, если внѣшняя и внутреннія части сѣкущей равны?

11. Изъ точки, взятой внѣ круга радіуса r, проведены двѣ сѣкущія, изъ которыхъ одна проходитъ черезъ центръ. Каковы длины внѣшнихъ отрѣзковъ сѣкущихъ, если дуги между ними $30°$ и $60°$?

12. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведена сѣкущая, проходящая черезъ центръ, которая окружностью круга раздѣлилась въ крайнемъ и среднемъ отношеніи. Опредѣлить уголъ, образуемый сѣкущей и касательной, проведенной изъ той-же точки.

13. Два круга O и O′ разныхъ радіусовъ пересѣкаются въ точкахъ A и B такъ, что общая хорда $AB=a$, встрѣчающая линію центровъ OO′ въ точкѣ C, составляетъ уголъ α съ радіусомъ, проведеннымъ къ точку A. Опредѣлить радіусы круговъ описаннаго около $\triangle$ AOO′ и вписаннаго въ $\triangle$ ACO.

14. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія: ACD, проходящая черезъ центръ, и AEF. Если сѣкущая ACD раздѣлилась окружностью на двѣ равныя части, а внѣшняя часть сѣкущей AEF въ n болѣе внутренней, то каковъ центральный уголъ, соотвѣтствующій внутренней части сѣкущей AEF?

15. Опредѣлить уголъ, образуемый линіей центровъ двухъ касающихся извнѣ окружностей, отношеніе радіусовъ которыхъ n, съ радіусами, проведенными въ точки касанія ихъ внѣшней касательной.

16. Черезъ точку A внѣшняго касанія двухъ окружностей различныхъ радіусовъ проведены двѣ сѣкущія PAN и QAM. Опредѣлить разстояніе между центрами, если отношеніе периметровъ $\triangle\triangle$ APQ и AMN есть n, хорда AP стягиваетъ дугу α и болѣе хорды AN на a.

17. Черезъ точку A внѣшняго касанія двухъ окружностей различныхъ радіусовъ проведены двѣ сѣкущія, пересѣкающія окружности въ точкахъ P, Q, M и N, причемъ сѣкущая QAM проходитъ черезъ центръ. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$ APQ, если отношеніе периметровъ $\triangle\triangle$ APQ и AMN есть n, хорда AP стягиваетъ дугу α и болѣе хорды AN на a.

Упражненіе. Полагая $a=1$ метру, $n=3$, опредѣлить радіусъ для $\alpha=60°$, $90°$, $120°$.

18. Каково должно быть разстояніе между центрами соприкасающихся извнѣ окружностей, чтобы касательная, проведенная изъ центра одной, съ линіей центровъ составляла углы: 1) $45°$, 2) $60°$, если разность радіусовъ 1 метръ.

19. Двѣ окружности касаются извнѣ; изъ центра O бо́льшей окружности радіуса r проведены сѣкущая OA, проходящая черезъ точку касанія, и касательная OB подъ угломъ α къ ней. Опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около $\triangle$ AOB и разстояніе центровъ.

20. Двѣ окружности касаются извнѣ; изъ центра O′ меньшей окружности проведена касательная O′D къ другой окружности. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$ O′DO (O—центръ бо́льшаго круга), если уголъ между касательной и линіей центровъ α, а радіусъ круга описаннаго R.

21. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая, проходящая черезъ центръ, и касательная, образующая съ сѣкущей уголъ $45°$. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, сторонами котораго служатъ сѣкущая и касательная, если

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

сторона вписаннаго въ данный кругъ квадрата болѣе стороны вписаннаго въ него восьмиугольника на a метровъ.

22. Изъ точки, взятой внѣ круга, проведены касательная и сѣкущая, проходящая черезъ центръ и составляющая съ ней уголъ 30^0. Если сторона вписаннаго двѣнадцатиугольника есть a, то каковъ радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, сторонами котораго служатъ сѣкущая и касательная?

Упр. Если уголъ 60^0, каковъ радіусъ круга описаннаго?

23. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая AB, проходящая черезъ центръ, и касательная AC. Опредѣлить длину касательной и сѣкущей, если хорда $BC=a$ стягиваетъ дугу $(90^0+\alpha)$.

24. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены касательная AB и сѣкущая AC, проходящая черезъ центръ. Опредѣлить длину сѣкущей AC, если биссекторъ угла $CAB=\alpha$ дѣлитъ хорду CB на части, изъ которыхъ одна есть a.

25. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая черезъ центръ AC и касательная AB. Каковъ долженъ быть уголъ между ними, чтобы биссекторъ $\angle ACB$ раздѣлилъ касательную на части въ отношеніи $\sqrt{2}:1$?

26. Въ кругѣ изъ конца діаметра AB проведена хорда AM, которая въ n менѣе діаметра; затѣмъ уголъ MAB раздѣленъ биссекторомъ AK. Опредѣлить радіусъ круга, если разность разстояній точекъ M и K, находящихся на хордѣ MB, до діаметра есть a.

27. Опредѣлить радіусъ круга, вписаннаго въ прямоугольный треугольникъ, у котораго одинъ уголъ 15^0, а длина медіаны *) изъ вершины прямого угла $\sqrt{2}$ метра.

28. По данному радіусу r круга опредѣлить: a_n, a_{2n}, b_n, l_{2n}.

29. Опредѣлить углы прямоугольнаго треугольника, если даны r—радіусъ круга вписаннаго и гипотенуза a.

30. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC данъ $\angle ACB=\alpha$. Опредѣлить, на какой части катета AC, какъ на діаметрѣ, надо описать

*) Медіаной называется прямая, соединяющая вершину угла треугольника съ серединой противоположной стороны.

полуокружность, чтобы она прошла черезъ вершину $\angle$ ACB и середину E гипотенузы BC.

Упражненіе. Разобрать случаи: $\alpha=30^0$, 45^0, 60^0.

31. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC изъ вершины прямого угла A проведенъ перпендикуляръ AD на гипотенузу. Опредѣлить углы треугольника, если радіусы круговъ, вписанныхъ въ $\triangle\triangle$ ABD и ADC, суть r и R.

32. Въ равнобедренномъ треугольникѣ отношеніе высоты къ радіусу круга описаннаго есть n. Опредѣлить величины угловъ.

33. Опредѣлить углы прямоугольной трапеціи ABCD, если сумма ея высоты AC и большаго основанія AB есть $m=25$, 13, радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$ ABC, есть $r=10$, а радіусъ круга, описаннаго около $\triangle$ BCD, есть $R=6{,}5$.

34. Въ какомъ прямоугольномъ треугольникѣ отношеніе суммы катетовъ къ діаметру круга вписаннаго есть $(2+\sqrt{2})$?

35. По данному радіусу r круга, описаннаго около правильнаго n—угольника, опредѣлить радіусъ круга, описаннаго около правильнаго $2n$—угольника и его апоѳему, если периметры многоугольниковъ равны между собой.

36. Въ $\triangle$ ABC съ $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$ вписанъ кругъ, касающійся стороны BC въ точкѣ D. Если BD болѣе DC на a, то каковъ радіусъ этого круга?

Отдѣлъ II.

Измѣреніе площадей.

37. Опредѣлить площадь равнобедреннаго треугольника, если длина линіи, соединяющей середину основанія съ серединой равной стороны, есть половина R круга описаннаго.

38. Опредѣлить площадь и углы прямоугольнаго треугольника, если дана длина h перпендикуляра, опущеннаго изъ вершины прямого угла на гипотенузу, и длина a медіаны изъ вершины прямого угла.

39. Изъ точки A, взятой внѣ круга радіуса r, проведены сѣкущая, проходящая черезъ центръ, и касательная, составляю-

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

щая съ ней уголъ α. Затѣмъ изъ середины M касательной возставленъ перпендикуляръ до встрѣчи съ сѣкущей въ точкѣ N, а изъ N проведена другая сѣкущая NK, параллельная касательной. Опредѣлить площадь $\triangle$ MNK.

40. Въ косоугольномъ треугольникѣ одинъ изъ угловъ при основаніи 30°; опредѣлить его площадь и остальные углы, если длина прямой, соединяющей точку встрѣчи высоты и основанія съ серединой стороны, прилежащей къ углу 30°, есть a, а сторона, противолежащая этому углу, есть b.

41. На основаніи AC равнобедреннаго $\triangle$ ABC съ $\angle$ B=α описана полуокружность, пересѣкающая бока въ точкахъ D и E. Опредѣлить отношеніе площадей трапеціи ADEC и $\triangle$ ABC.

42. Опредѣлить стороны равностороннаго треугольника, равновеликаго ромбу, у котораго одинъ изъ острыхъ угловъ α=42°19′16″, а разстояніе середины діагоналей до основанія перпендикуляра изъ вершины тупого угла есть a=1,4 м.

43. Изъ вершины A квадрата подъ угломъ 60° проведена прямая AM, отѣкающая отъ квадрата трапецію. Опредѣлить ея площадь, если извѣстна линія a, соединяющая середину проведенной прямой съ основаніемъ перпендикуляра изъ M.

44. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены двѣ равныя сѣкущія ABD и ACE. Если дуги BC и DE равны 60° и 120°, а площадь четыреугольника BCED равна S, то какова разность площадей сегментовъ, ограниченныхъ хордами DE и BC?

45. Если разность радіуса и апоѳемы есть d, то какъ выразится въ такомъ случаѣ: 1) сторона a_n вписаннаго n—угольника, 2) сторона b_n описаннаго n—угольника, 3) какою будетъ выраженіе площадей n—угольника вписаннаго и описаннаго?

46. Прямая, проведенная изъ вершины угла α при основаніи равнобедреннаго треугольника дѣлитъ площадь его пополамъ. Опредѣлить уголъ, образованный этой прямой съ бокомъ треугольника, прилежащимъ къ углу α.

Упражненіе. Вычислить уголъ, полагая α=30°, 45°.

47. Въ кругѣ O вписана трапеція ABCD, основанія которой AB и CD стягиваютъ дуги α=148°26′14″ и β=59°16′34″. Опредѣлить площадь трапеціи, если площадь $\triangle$ ABC болѣе площади $\triangle$ BCD на S=12,5 кв. м.

48. Двѣ окружности равныхъ радіусовъ r пересѣкаются въ точкахъ A и B. Опредѣлить площадь ихъ общей части, если радіусъ, проведенный изъ точку A, составляетъ съ линіей центровъ уголъ $22^1/_2{}^0$.

49. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ, съ внѣшней частью a, и касательная AB, которая въ n болѣе внѣшней части сѣкущей. Опредѣлить площадь $\triangle$ ABD.

50. Въ кругѣ вписанъ равнобедренный $\triangle$ ABC съ основаніемъ AC. Въ точкѣ C проведена касательная CM, а бокъ AB продолженъ до встрѣчи съ касательной въ точкѣ M. Опредѣлить отношеніе площадей $\triangle\triangle$ BMC и AMC, если $\angle$ABC=α.

51. Двѣ окружности касаются внутренне; изъ точки касанія A въ бо́льшей окружности проведены двѣ равныя хорды AMP и ANQ, пересѣкающія меньшую окружность въ точкахъ M и N, причемъ AM вдвое болѣе MP. Опредѣлить разстояніе между центрами и радіусъ круга, вписаннаго въ $\triangle$ AMN, если длина хордъ a, а уголъ между ними α.

52. Опредѣлить площадь правильнаго многоугольника, вписаннаго или описаннаго, если даны стороны a_n и b_n.

53. Опредѣлить площадь трапеціи, вписанной въ кругъ радіуса r=1,3 м., если уголъ между ея діагоналями α=108°16′56″, а бо́льшее основаніе проходитъ черезъ центръ.

54. Въ $\triangle$ ABC на основаніи AB описана полуокружность, которая раздѣлила сторону BC на такія части BE и CE, что отношеніе площадей $\triangle\triangle$ ABE и AEC есть $m:n$. Опредѣлить площадь $\triangle$ ABC, если высота h, соотвѣтствующая сторонѣ BC, образуетъ уголъ α съ стороною AB.

55. Изъ конца A діаметра AB проведена хорда AC въ a метровъ подъ угломъ α къ діаметру и продолжена за C до точки D на то-же разстояніе a. Опредѣлить радіусы круговъ, вписаннаго и описаннаго около $\triangle$ ADB.

56. Какимъ долженъ быть уголъ при основаніи AB треугольника ABC, если полуокружность, описанная на этомъ основаніи

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

дѣлитъ противолежащую этому углу сторону $CB=2$ на равныя части и если площадь треугольника 4.

57. Въ равностороннемъ $\triangle ABC$, площадь котораго S, на основаніи AC описана полуокружность, которая пересѣкла стороны AB и BC въ точкахъ D и E. Опредѣлить площадь $\triangle ADE$.

58. Къ кругу радіуса $r=2{,}2$ м. въ точкахъ A и C проведены двѣ параллельныя касательныя; затѣмъ проведена третья касательная BD, пересѣкающая первыя двѣ въ точкахъ B и D. Опредѣлить площадь трапеціи ABCD, если $\angle CDB=x=52°18'42''$.

59. Въ $\triangle ABC$ вписанъ кругъ радіуса $r=1$ м. Опредѣлить его углы и площадь, если основаніе $BC=a=42{,}5$ м., а разность сторонъ AB и AC есть $m=17{,}25$ м.

60. Въ равнобедренномъ $\triangle ABC$ съ основаніемъ b и угломъ при основаніи, меньшимъ 60°, проведена изъ вершины B прямая $BD=l$ до встрѣчи съ основаніемъ въ точкѣ D, причемъ разность отрѣзковъ AD и CD тоже равна l. Опредѣлить площадь этого треугольника и углы $\triangle CDB$.

Упр. Найти углы $\triangle ABC$, если $l=15{,}25$ м.; $b=60{,}156$ м.

61. Въ равнобедренномъ $\triangle ABC$ съ угломъ при основаніи, бо́льшимъ 60°, изъ вершины B проведена прямая $BD=l$ до встрѣчи съ основаніемъ такъ, что сумма отрѣзковъ AD и CD равна b. Опредѣлить площадь и углы $\triangle ABC$, если $AC=b$.

Упражненіе. Вычислить углы, если $l=84{,}75$ м. $b=45$ м.

62. Въ прямоугольномъ $\triangle ABC$ кругъ, проходящій черезъ точки A и C, отсѣкаетъ отъ гипотенузы BC и катета AB, считая отъ основанія AC, части $CF=m$ и $AE=n$. Опредѣлить площадь четыреугольника AEFC, если $\angle ABC=x$.

63. На гипотенузѣ BC и катетѣ AB прямоугольнаго $\triangle ABC$ отложены, считая отъ основанія AC, отрѣзки CF и AE, соотвѣтственно равные m и n. Какими должны быть углы прямоугольнаго треугольника, чтобы площади AEC и EFC были равны, если A, C, E и F лежатъ на окружности одного и того-же круга?

64. Опредѣлить углы и отношеніе радіусовъ круговъ вписаннаго и описаннаго около равнобедреннаго треугольника, у котораго высота H, а длина перпендикуляра, опущеннаго изъ середины основанія на равную сторону, есть h.

65. Въ кругъ вписанъ равнобедренный $\triangle ABC$, съ боковой стороной $AB=a=17$ м.; затѣмъ изъ B проведена хорда $BK=l=20$ м., пересѣкающая основаніе AC въ точкѣ D и образующая съ BC уголъ $\alpha=18°15'40''$. Опредѣлить площадь $\triangle BDC$.

Упражненіе. Опредѣлить отношеніе площадей $\triangle\triangle$ BCK и BCD и углы $\triangle ABC$, если отношеніе BK и BC есть $\sqrt{3}$, а уголъ между ними 30°.

66. Въ кругѣ O проведенъ радіусъ OC, составляющій съ діаметромъ AB уголъ $AOC=3x$ ($3x<180°$); затѣмъ по ту-же сторону діаметра проведенъ другой радіусъ OD, составляющій съ тѣмъ-же діаметромъ $\angle DOB=x$, а хорда CD продолжена до встрѣчи съ діаметромъ въ точкѣ E; причемъ $OE=d$. Опредѣлить площадь $\triangle OCD$ и отношеніе ея къ площади $\triangle ODE$.

67. Въ кругѣ вписанъ правильный $\triangle ABC$ съ стороною $a=4{,}5$ м.; затѣмъ подъ угломъ $\alpha=18°27'39''$ къ сторонѣ внутри треугольника изъ вершины B проведена хорда BD. Опредѣлить площадь четыреугольника ABCD.

68. Внутри правильнаго вписаннаго въ кругъ $\triangle ABC$ проведена хорда BD такъ, что разность периметровъ четыреугольника ABCD и $\triangle ABC$ въ n менѣе длины a стороны треугольника. Опредѣлить $\angle DBC$ и площадь четыреугольника ABCD.

69. Въ кругѣ вписанъ $\triangle ACB$ съ стороною $AC=a=0{,}5$ и $\angle ACB=x=23°10'12''$; затѣмъ изъ вершины A проведена хорда $AE=2a$, которая въ точкѣ D встрѣчи съ стороною CB дѣлится на равныя части. Опредѣлить площадь $\triangle ABC$.

70. Въ параллелограммѣ проведена равнодѣляющая d тупого угла α. Опредѣлить площадь трапеціи, отсѣченной этой равнодѣляющей, если діагональ раздѣлена ею на части въ отношеніи $m:n$.

71. Двѣ окружности касаются внутренне; изъ точки касанія A проведены двѣ равныя хорды въ бо́льшей окружности AMP и ANQ. Если радіусы окружностей r и $2r$, а уголъ между хордами α, то какъ выразится: 1) отношеніе радіусовъ круговъ, вписанныхъ въ треугольники APQ и AMN, 2) площадь MPNQ.

72. Опредѣлить отношеніе площадей двухъ касающихся извнѣ окружностей, если уголъ, образованный линіей центровъ съ радіусомъ

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

бо́льшаго круга, проведеннымъ въ точку касанія ихъ внѣшней касательной, есть α.

73. Опредѣлить площадь прямоугольной трапеціи съ угломъ α, если бо́льшій бокъ a, а меньшій можетъ быть принятъ за общую касательную къ двумъ кругамъ, центры которыхъ находятся въ серединахъ основаній и они касаются извнѣ.

Упражненіе. Вычислить площадь, полагая $\alpha=15^0$, 30^0, 45^0, 60^0, 75^0; $a=1$ метру.

74. Опредѣлить площадь прямоугольной трапеціи, у которой бо́льшая діагональ составляетъ съ основаніемъ уголъ α, а разстояніе середины ея до вершины прямого угла a, если отношеніе основаній n.

75. Опредѣлить площадь прямоугольной трапеціи, у которой отношеніе основаній n, длина линіи, соединяющей середины ихъ, d, а уголъ, образованный ею съ бо́льшимъ основаніемъ, α.

76. Опредѣлить радіусъ круга вписаннаго въ углы равнобедреннаго треугольника, у котораго разность высоты и линіи, соединяющей середину основанія съ серединой равной стороны, равна половинѣ радіуса R круга описаннаго.

77. Изъ точки D, взятой внѣ круга радіуса r, проведены сѣкущая DKF (*проходящая черезъ центръ*) подъ угломъ α къ діаметру AB и касательная DB; затѣмъ въ точкѣ K проведена касательная KE, встрѣчающая продолженіе діаметра AB въ точкѣ E. Опредѣлить площадь KDEB.

78. Изъ точки D, взятой внѣ круга, проведена касательная DB; линія OD (O—центръ круга), составляющая съ діаметромъ AB уголъ $\alpha=37^0 15' 27''$, пересѣкаетъ окружность въ точкѣ K, а касательная KE встрѣчаетъ продолженіе діаметра въ точкѣ E. *Опредѣлить* отношеніе радіусовъ круговъ описаннаго и вписаннаго въ $\triangle$ ODE.

Упражненіе Разсмотрѣть частный случай $\alpha=60^0$.

79. Изъ точки A, взятой внѣ двухъ концентрическихъ круговъ, проведены двѣ сѣкущія къ внѣшнему кругу; одна изъ нихъ проходитъ черезъ центръ и составляетъ съ другой уголъ $\alpha=47^0 13' 20''$, а эта послѣдняя касается внутренняго круга и окруж-

ностью бо́льшаго круга дѣлится на равныя части. Опредѣлить отношеніе площадей круговъ.

80. Если площадь кругового кольца между двумя концентрическими окружностями есть $S=18{,}4$ кв. м., то какова площадь треугольника, имѣющаго вершиною центръ, а основаніемъ хорду бо́льшаго круга, касательную къ окружности меньшаго и стягивающую дугу $\alpha=49^0 57' 32''$.

81. Въ бо́льшемъ изъ двухъ концентрическихъ круговъ проведены двѣ хорды AB и DF касательныя въ точкахъ C и E къ меньшему кругу. Опредѣлить площадь четыреугольника ABFD, если линія CE стягиваетъ дугу α, отношеніе радіусовъ n, а радіусъ меньшаго круга r.

Упражненіе. Разобрать случаи $n=2$, а $\alpha=60^0$, 90^0, 120^0.

82. Изъ точки O, взятой на продолженіи бо́льшей стороны AB параллелограмма ABDC съ угломъ α, проведена окружность, которая касается меньшей параллельной стороны BD. Если продолженіе другой бо́льшей параллельной стороны касается окружности въ точкѣ K, и эта сторона вдвое болѣе меньшей высоты, то каково отношеніе площадей параллелограмма ABDC и четыреугольника BDKO?

Упражненіе. Разобрать случай $\alpha=60^0$.

83. Опредѣлить площадь прямоугольной трапеціи, если радіусъ круга вписаннаго $r=2{,}4$, а острый уголъ $\alpha=36^0 18' 24''$.

84. Изъ точки A, взятой внѣ круга радіуса r, проведены сѣкущая ADB, проходящая черезъ центръ, и касательная AC, равная сторонѣ правильнаго вписаннаго въ этотъ кругъ треугольника. Опредѣлить: 1) площадь, ограниченную дугою круга, касательною и внѣшней частью сѣкущей, 2) площадь сегмента, отрѣзаннаго хордой BC.

85. Опредѣлить площадь прямоугольнаго $\triangle$ ABC, если даны длина h перпендикуляра AD, опущеннаго изъ вершины прямого угла A, и радіусы круговъ, вписанныхъ въ треугольники ABD и ADC, r и R.

86. Въ равнобедренный $\triangle$ ABC, съ угломъ $\alpha=27^0 35' 12''$ при основаніи AC, вписанъ кругъ радіуса $r=1$ м. Если точки

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

касанія этого круга съ равными бокамъ треугольника суть D и E то какова площадь четыреугольника ADEC?

87. Какомъ долженъ быть уголъ при основаніи равнобедреннаго треугольника, чтобы линія, соединяющая точки касанія круга, въ него вписаннаго, съ равными сторонами, дѣлила его площадь на части въ отношеніи $m:n$.

88. Опредѣлить углы ромба, равновеликаго прямоугольному треугольнику, у котораго разность діаметровъ прямого угла $\frac{2}{3}h\sqrt{3}$, а высота h, проведенная изъ вершины того-же угла, равна діагонали ромба.

89. Стороны правильнаго пятиугольника *abcde* продолжены до взаимнаго пересѣченія въ точкахъ A, B, C, D, E. Опредѣлить площадь пятиугольника ABCDE, если данъ радіусъ r круга, описаннаго около пятиугольника *abcde*.

90. Стороны правильнаго шестиугольника *abcdef* продолжены до взаимнаго пересѣченія въ точкахъ A, B, C, D, E и F. Опредѣлить площадь шестиугольника ABCDEF, если дана сторона a шестиугольника *abcdef*.

Упражненіе. Вычислить ту-же площадь, если радіусъ круга, вписаннаго въ шестиугольникъ *abcdef*, равенъ 1 метру.

91. Стороны правильнаго n—угольника продолжены до взаимнаго пересѣченія. Опредѣлить площадь полученнаго n—угольника, если сторона даннаго есть a.

92. Изъ точки A, взятой внѣ круга радіуса $r=3{,}25$, проведены сѣкущая AB, проходящая черезъ центръ, и касательная AD подъ $\angle\alpha=12°17'18''$ къ сѣкущей. Опредѣлить площадь $\triangle$ ABD.

93. Трапеція вписана въ кругъ: опредѣлить ея площадь, если ея діагональ d образуетъ съ основаніемъ уголъ α.

94. Трапеція вписана въ кругъ такъ, что бо́льшее основаніе равно діаметру. Опредѣлить ея площадь, если меньшее основаніе $b=0{,}8$ дц., а одинъ изъ острыхъ угловъ $\alpha=44°15'10''$.

95. Около круга радіуса $r=1$ м. описана трапеція такъ, что разность отрѣзковъ, на которые дѣлится точкой касанія одинъ

изъ боковъ есть $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ м. Опредѣлить ея площадь, если другой бокъ образуетъ съ бо́льшимъ основаніемъ уголъ $\alpha=37°10'17''$.

96. Стороны ромба, у котораго длина діагонали d, а острый уголъ α, продолжены по одному направленію на длину, равную его сторонѣ. Опредѣлить площадь полученнаго четыреугольника и доказать, что онъ параллелограммъ.

97. Три окружности радіусовъ a, b, c соприкасаются въ точкахъ A, B и C. Опредѣлить площадь $\triangle$ ABC.

98. Три окружности радіусовъ r, $2r$, $3r$ соприкасаются въ точкахъ A, B и C. Опредѣлить площадь $\triangle$ ABC. (Опредѣленіе сдѣлать независимо отъ № 97).

99. Двѣ окружности O и O' различныхъ радіусовъ пересѣкаются въ точкахъ A и B. Опредѣлить площадь круга, описаннаго около $\triangle$ OAO', если общая хорда AB, равная $2h$, дѣлитъ діаметры данныхъ круговъ на части въ отношеніи 3:1 и 2:1.

100. Въ равнобочной трапеціи ABCD, у которой отношеніе основаній AB и CD равно 2, на линіи, соединяющей середины параллельныхъ сторонъ, взята точка E на разстояніи, равномъ третьей части высоты, считая отъ меньшаго основанія. Опредѣлить сумму площадей $\triangle\triangle$ AEC и BED, если боковая сторона трапеціи равна a, а острый уголъ α.

Упражненіе. Опредѣлить сумму площадей $\triangle\triangle$ AEB и CED.

101. Опредѣлить площадь равнобочной трапеціи, если разность ея діагонали и высоты есть $a=1{,}5$ дц., а уголъ, образуемый діагональю съ основаніемъ $\alpha=17°6'8''$.

102. Опредѣлить углы равнобедреннаго треугольника, боковая сторона котораго болѣе половины основанія на $\frac{1}{3}r\sqrt{3}$, если r означаетъ радіусъ круга, вписаннаго въ данный треугольникъ.

103. Опредѣлить площадь треугольника, отрѣзаннаго отъ равнобедреннаго прямой касательной къ кругу, вписанному въ данный, если касательная проведена параллельно основанію, площадь остальной части треугольника S, а уголъ при основаніи α.

104. Въ прямоугольномъ треугольникѣ проведена равнодѣлящая угла α. Опредѣлить отношеніе 1) площадей полученныхъ треугольниковъ, 2) радіусовъ круговъ, описанныхъ около нихъ.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

105. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены двѣ сѣкущія AEM и AE'M', образующія уголъ α, причемъ ихъ внутреннія части равны между собой и, кромѣ того, уголъ, образованный радіусомъ, проведеннымъ въ точку E, съ внутреннею частью EM сѣкущей AEM, есть φ. Опредѣлить отношеніе площадей треугольника, сторонами котораго служатъ сѣкущія, и трапеціи, бока которой суть внутреннія части сѣкущихъ.

106. Въ бо́льшемъ кругѣ двухъ концентрическихъ окружностей проведена хорда DC, стягивающая дугу α и касательная въ точкѣ B къ меньшей окружности; затѣмъ въ точкѣ C проведена къ бо́льшей окружности касательная, которая встрѣчаетъ продолженіе радіуса OB въ точкѣ A, причемъ разстояніе $OA=a$. Опредѣлить часть площади бо́льшаго круга, заключающуюся между касательной DC и другой касательной къ меньшей окружности D'C', ей параллельной.

107. Изъ точки, взятой внѣ круга радіуса r, проведены подъ угломъ α двѣ такія сѣкущія, что внутреннія ихъ части находятся на разстояніи a отъ центра. Опредѣлить площадь четыреугольника, сторонами котораго служатъ внутреннія части сѣкущихъ.

108. Къ двумъ касающимся извнѣ въ точкѣ M окружностямъ проведена внѣшняя касательная AB. Опредѣлить площадь $\triangle$ MCD, если AC и BD суть діаметры, проведенные черезъ точки касанія A и B, отношеніе радіусовъ кругонъ есть n, а радіусъ меньшей окружности r.

Упражненіе. Доказать, что $\triangle$ CMD всегда прямоугольный и опредѣлить его углы и площадь, полагая $r=1$ м., $n=4$.

109. Радіусъ круга, вписаннаго въ секторъ AOB съ дугою $\alpha=32°15'24''$, есть $r=1$ м. Опредѣлить площадь $\triangle$ AOB.

110. Въ кругъ вписанъ правильный n—угольникъ, сторона котораго a. Изъ всѣхъ вершинъ n—угольника проведены по двѣ діагонали къ ближайшимъ вершинамъ. Опредѣлить площадь многоугольника, сторонами котораго служатъ среднія отрѣзки діагоналей.

111. Въ прямоугольную трапецію вписанъ кругъ радіуса $r=1$ м. Діаметръ, соединяющій точки касанія, образуетъ съ бо́льшимъ бокомъ уголъ $\alpha=23°15'10''$; опредѣлить площадь трапеціи.

112. Опредѣлить отношеніе радіусовъ кругонъ, вписанныхъ въ ромбъ съ острымъ угломъ α и въ половину того-же ромба, отсѣченную діагональю.

113. Въ прямоугольномъ $\triangle$ ABC проведенъ биссекторъ BD угла ABC; гипотенуза BC вдвое болѣе катета AB; разность разстояній точекъ A и D до гипотенузы равна a; опредѣлить площадь $\triangle$ ABC и разность площадей $\triangle\triangle$ ABD и BDC.

114. Въ кругѣ радіуса $R=1$ м. проведены двѣ равныя хорды, стягивающія дуги $\alpha=28°18'36''$. Опредѣлить площадь той части круга, которая лежитъ между хордами.

115. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ и касательная AB, причемъ $\angle CAB=\alpha$. Опредѣлить площадь фигуры ABC, ограниченной касательной, внѣшней частью a сѣкущей и дугою BC.

116. На діаметрѣ AB полуокружности радіуса R построенъ равнобедренный $\triangle$ ABC съ угломъ при основаніи α, бока AC и BC пересѣкаютъ окружность въ точкахъ D и E. Опредѣлить площадь, ограниченную прямыми DC, CE и дугою DE.

Стереометрія.

Отдѣлъ III.

Измѣреніе угловъ. Призмы. Пирамиды.

117. Означая въ правильной n—угольной пирамидѣ черезъ α уголъ между ребромъ и плоскостью основанія, черезъ β двугранный уголъ при основаніи, черезъ γ плоскій уголъ при основаніи боковой грани, черезъ δ уголъ между боковыми гранями, найти соотношенія между этими углами.

118. Опредѣлить въ правильномъ тетраэдрѣ: двугранный уголъ при основаніи, наклоненіе ребра къ плоскости основанія, уголъ

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

между апофемой и противоположнымъ ребромъ, двугранный уголъ между боковыми гранями.

119. Опредѣлить уголъ между ребромъ и основаніемъ, а также и плоскіе углы боковой грани шестиугольной пирамиды, если двугранный уголъ при основаніи $\alpha = 36°15'20''$.

120. Опредѣлить двугранный уголъ при основаніи правильной 4-угольной пирамиды и плоскіе углы боковой грани, если ребро наклонено къ плоскости основанія подъ угломъ $36°15'20''$.

121. Въ правильной прямой треугольной призмѣ черезъ сторону основанія проведена плоскость, которая въ сѣченіи дала треугольникъ периметра вдвое большаго, чѣмъ у основанія. Опредѣлить уголъ между этой плоскостью и плоскостью основанія и отношеніе радіусовъ круговъ, вписаннаго въ сѣченіе и описаннаго около основанія.

122. Подъ какимъ угломъ къ плоскости основанія въ прямой треугольной призмѣ надо провести плоскость черезъ сторону основанія, чтобы радіусъ круга, вписаннаго въ полученное треугольное сѣченіе, былъ вдвое менѣе радіуса круга, описаннаго около основанія, и чтобы периметръ сѣченія былъ вдвое болѣе периметра основанія, стороны котораго находятся въ отношеніи 2:3:4?

123. Подъ какимъ угломъ въ правильной прямой треугольной призмѣ надо провести плоскость черезъ сторону основанія, чтобы боковая поверхность отсѣченной призмы была въ n менѣе боковой поверхности данной, если боковое ребро призмы въ $2n$ болѣе радіуса круга, вписаннаго въ основаніе призмы.

124. Подъ какимъ угломъ въ правильной прямой треугольной призмѣ надо провести плоскость черезъ сторону основанія, чтобы боковая поверхность данной призмы была равна полной поверхности усѣченной?

125. Въ правильной прямой треугольной призмѣ плоскость, проходящая черезъ сторону основанія и противолежащую ей вершину, отсѣкаетъ треугольную пирамиду, полная поверхность которой равна боковой поверхности данной призмы. Найти отношеніе бокового ребра призмы къ сторонѣ основанія и уголъ между проведенною плоскостью и плоскостью основанія призмы.

126. Опредѣлить полную поверхность треугольной наклонной призмы, если площадь перпендикулярнаго сѣченія $S = 124$ кв. м., а боковое ребро въ $n = 5$ разъ болѣе радіуса круга, вписаннаго въ это сѣченіе, которое съ плоскостью основанія образуетъ уголъ $\alpha = 30°15'20''$.

127. Боковая поверхность прямой призмы $S = 2{,}3$ кв. м.; основаніе ея есть равнобочная трапеція, имѣющая одну изъ параллельныхъ сторонъ равную боку a, а уголъ $\alpha = 31°23'15''$. Опредѣлить площадь діагональной плоскости призмы.

128. Боковая поверхность правильной прямой треугольной призмы $S = 22{,}5$ кв. м. Опредѣлить ея полную поверхность, если плоскость, проходящая черезъ сторону основанія и противолежащую вершину, образуетъ съ основаніемъ уголъ $\alpha = 28°17'36''$.

129. Опредѣлить объемъ прямой призмы, въ основаніи которой равнобочная трапеція съ острымъ угломъ $\alpha = 35°15'18''$ и боковой стороной $a = 5$ м., равною меньшему основанію, если уголъ между діагональю призмы и діагональю трапеціи $= {}^1/_2\alpha$.

130. Опредѣлить объемъ прямой призмы, у которой въ основаніи равнобедренный треугольникъ съ угломъ при вершинѣ $\alpha = 48°33'30''$ и противолежащей стороной $b = 25{,}6$ м., если діагональ одной изъ равныхъ боковыхъ граней наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\beta = 36°19'18''$.

131. Опредѣлить объемъ прямой призмы, у которой въ основаніи прямоугольный треугольникъ съ угломъ $\alpha = 42°29'13''$, если боковое ребро призмы $h = 10$ м. составляетъ съ діагональю большей боковой грани уголъ $\beta = 27°39'54''$.

132. Основаніе прямой призмы ромбъ съ угломъ $\alpha = 86°32'20''$; уголъ между его меньшею діагональю $d = 5$ м. и меньшей діагональю призмы $\beta = 28°17'6''$. Опредѣлить объемъ призмы.

133. Опредѣлить объемъ прямой призмы, у которой въ основаніи ромбъ, съ стороною $a = 8$ м. и угломъ $\alpha = 122°14'8''$, если діагональ боковой грани съ ребромъ составляетъ уголъ $\beta = 16°10'6''$.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

134. Опредѣлить боковую поверхность правильной n—угольной пирамиды, если разстояніе центра основанія пирамиды до середины ребра есть d, а плоскій уголъ при вершинѣ 2α.

135. Опредѣлить боковую поверхность правильной n—угольной усѣченной пирамиды, у которой отношеніе площадей основаній m^2, апоѳема d, а уголъ между апоѳемой и высотой α.

136. Въ правильной усѣченной треугольной пирамидѣ помѣщена треугольная пирамида, основаніе которой совпадаетъ съ основаніемъ данной, а вершина находится въ центрѣ меньшаго основанія. Опредѣлить отношеніе боковыхъ поверхностей этихъ пирамидъ, если высота пирамиды вдвое менѣе апоѳемы внутренней, а уголъ между боковыми гранями пирамидъ α.

Упр. Сохраняя условіе, опредѣлить объемъ внутренней пирамиды, если апоѳема внѣшней $a=3$ м., а $\alpha=36°17'20''$.

137. Въ правильной треугольной усѣченной пирамидѣ помѣщена пирамида, основаніе которой совпадаетъ съ меньшимъ основаніемъ данной, а вершина находится въ центрѣ другого основанія. Опредѣлить: 1) отношеніе боковыхъ поверхностей пирамидъ, если апоѳема меньшаго основанія вдвое менѣе апоѳемы внутренней пирамиды, а уголъ между боковыми гранями пирамидъ α, 2) когда это отношеніе равно 3.

138. Опредѣлить полную поверхность и объемъ правильной n—угольной пирамиды, если даны апоѳема ея a и уголъ α наклоненія боковыхъ граней къ плоскости основанія.

139. Опредѣлить объемъ и полную поверхность правильной шестиугольной пирамиды, у которой высота h, а боковыя грани наклонены къ плоскости основанія подъ угломъ α.

140. Опредѣлить объемъ и полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой боковое ребро 7 метровъ, а уголъ между высотой и апоѳемой 30°.

141. Опредѣлить объемъ и полную поверхность правильной n—угольной пирамиды по высотѣ h и плоскому углу при вершинѣ α.

142. Опредѣлить объемъ правильной n—угольной пирамиды, если боковое ребро a образуетъ съ основаніемъ уголъ α.

143. Опредѣлить объемъ правильной n—угольной пирамиды, по боковой поверхности P и двугранному углу при основаніи α.

144. Опредѣлить полную поверхность и объемъ правильной n—угольной пирамиды, если сумма ея апоѳемы и апоѳемы основанія есть a, а плоскій уголъ при вершинѣ α.

145. Въ данной правильной n—угольной пирамидѣ съ стороною основанія a и угломъ α наклоненія боковой грани къ основанію черезъ середину высоты проведена плоскость, параллельная основанію. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды.

146. Въ усѣченномъ конусѣ, образующая котораго наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, вписана правильная усѣченная n—угольная пирамида. Опредѣлить ея объемъ, если радіусы основаній конуса r и nr.

147. Около усѣченнаго конуса, образующая котораго наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ α, описана правильная n—угольная пирамида. Опредѣлить ея объемъ, если радіусы основаній конуса r и nr.

148. Опредѣлить объемъ пирамиды, у которой въ основаніи треугольникъ, имѣющій сторону $a=15{,}5$ м. и прилежащіе къ ней углы $\alpha=88°19'30''$ и $\beta=76°32'18''$, если высота пирамиды наклонена къ ребру $b=42$ м. подъ угломъ $\gamma=42°26'31''$.

149. Опредѣлить объемъ пирамиды, у которой въ основаніи равнобедренный треугольникъ съ равной стороной $a=15$ м. и угломъ при вершинѣ $\alpha=130°12'36''$, если одно боковое ребро перпендикулярно къ равнымъ сторонамъ, а другое составляетъ съ плоскостью основанія уголъ $\beta=26°19'12''$.

150. Опредѣлить объемъ пирамиды, у которой въ основаніи правильный треугольникъ, если одно боковое ребро $b=13{,}4$ м. перпендикулярно къ плоскости основанія, а другое составляетъ съ нею уголъ $\alpha=56°18'17''$.

151. Опредѣлить объемъ пирамиды, у которой въ основаніи прямоугольный треугольникъ, если боковое ребро, проходящее черезъ вершину его угла $\alpha=37°18'11''$, перпендикулярно къ основанію, бо́льшее боковое ребро $a=6$ м. наклонено къ основанію подъ угломъ $\beta=42°6'6''$.

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

152. Въ 4-угольной пирамидѣ въ основаніи — равнобочная трапеція, у которой боковая сторона $a=10$ м. равна меньшей параллельной сторонѣ, а уголъ $\alpha=34°13'12''$. Опредѣлить объемъ пирамиды, если высота ея равна діагонали основанія.

153. Въ треугольной пирамидѣ черезъ середину высоты проведена плоскость параллельная основанію. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды, если въ основаніи данной находится равнобедренный треугольникъ, у котораго неравная сторона $b=12,5$ м., прилежащій къ ней уголъ $\alpha=47°10'20''$, а высота пирамиды данной равна діаметру круга, описаннаго около ея основанія.

154. Въ 4-угольной пирамидѣ черезъ середину высоты проведена плоскость параллельная основанію. Опредѣлить объемъ усѣченной пирамиды, если въ основаніи данной находится ромбъ съ меньшей діагональю $d=12$ м. и угломъ $\alpha=72°17'40''$, а высота усѣченной пирамиды равна бо́льшей діагонали ромба.

155. Основаніемъ пирамиды служитъ равнобедренный треугольникъ, у котораго уголъ между равными боками α, а радіусъ круга описаннаго R. Опредѣлить объемъ пирамиды, если высота ея втрое болѣе радіуса круга, вписаннаго въ основаніе.

156. Въ правильную треугольную усѣченную пирамиду съ двуграннымъ угломъ α при основаніи вписанъ усѣченный конусъ. Опредѣлить боковыя поверхности конуса и пирамиды, если апоѳема пирамиды равна суммѣ радіусовъ основаній конуса, а радіусъ меньшаго основанія конуса r.

157. Опредѣлить объемъ правильной треугольной пирамиды, если плоскій уголъ при вершинѣ α, а радіусъ круга, описаннаго около боковой грани, R.

158. Опредѣлить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоскій уголъ при основаніи боковой грани α, а радіусъ круга вписаннаго въ нее r.

159. Найти радіусъ шара, описаннаго около правильной пирамиды, по высотѣ h и углу α между ребромъ и основаніемъ.

160. Найти радіусъ шара, вписаннаго въ правильную n—угольную пирамиду, по сторонѣ основанія a и плоскому углу α при вершинѣ.

Отдѣлъ IV.

Круглыя тѣла.

161. Опредѣлить объемъ конуса, если въ его основаніи хорда $a=3,4$ м. стягиваетъ дугу $\alpha=37°16'20''$, а высота конуса наклонена къ образующей подъ угломъ $\beta=18°10'30''$.

162. Въ усѣченномъ конусѣ, у котораго отношеніе площадей основаній 4, образующая $l=18,6$ м. наклонена къ плоскости основанія подъ угломъ $\alpha=46°13'50''$. Опредѣлить объемъ конуса.

163. Опредѣлить объемъ цилиндра, если діагональ главнаго сѣченія $a=8,6$ м. наклонена къ основанію подъ угломъ $\alpha=58°49'30$

164. Опредѣлить боковую поверхность усѣченнаго конуса, описаннаго около правильной треугольной усѣченной пирамиды, если уголъ боковой грани α, а радіусъ круга, вписаннаго въ нее, r.

165. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ усѣченнаго конуса, образующая котораго наклонена къ основанію подъ угломъ α, если площадь круга, вписаннаго въ главное сѣченіе конуса, K.

166. Бо́льшее основаніе усѣченнаго конуса служитъ также основаніемъ конуса, имѣющаго вершину въ центрѣ меньшаго основанія. Опредѣлить разность объемовъ конусовъ, если въ усѣченный конусъ вписанъ шаръ радіуса r, а образующая конуса наклонена къ бо́льшему основанію подъ угломъ α.

167. Въ усѣченномъ конусѣ, у котораго отношеніе площадей основаній 4, находится другой конусъ, имѣющій общее основаніе съ даннымъ, а вершину въ центрѣ меньшаго основанія. Опредѣлить разность объемовъ этихъ конусовъ, если уголъ при вершинѣ главнаго сѣченія меньшаго конуса α и около этого конуса описанъ шаръ радіуса R.

168. Поверхность шара, вписаннаго въ конусъ, равна площади его основанія. Опредѣлить уголъ при вершинѣ конуса и отношеніе поверхностей сегментовъ, отдѣленныхъ на шарѣ линіей касанія шара и конуса.

169. Въ конусъ вписанъ шаръ, у котораго площадь большаго круга K. Если уголъ между высотой и образующей α, то какова объемъ конуса?

Архив Калюжного О.Н. (rarebooks.314159.ru , rarebooks.narod.ru)

170. Въ усѣченномъ конусѣ, образующая котораго наклонена къ основанію подъ угломъ α, вписанъ шаръ. Опредѣлить поверхность конуса и шара, если поверхность бо́льшаго сегмента, отдѣленнаго на шарѣ линіей касанія, равна S.

171. Въ шарѣ вписанъ конусъ съ угломъ при вершинѣ α. Опредѣлить боковую поверхность и объемъ конуса, если дана поверхность S сегмента, имѣющаго одинаковыя основаніе и высоту съ конусомъ.

172. Въ шаровой секторъ съ сферическою поверхностью S и дугою главнаго сѣченія α вписанъ шаръ. Опредѣлить поверхность шара.

173. Въ шаровой сегментъ съ дугою главнаго сѣченія α вписанъ шаръ наибольшаго діаметра съ поверхностью S. Опредѣлить поверхность сегмента и разность объемовъ сегмента и шара.

174. Опредѣлить длину дуги главнаго сѣченія шарового сегмента въ двухъ случаяхъ: 1) его объемъ въ n болѣе объема вписаннаго въ него шара наибольшаго діаметра, 2) поверхность вписаннаго шара въ n менѣе площади его основанія.

175. Въ шарѣ отдѣленъ слой съ равными основаніями, которыя служатъ основаніями сегмента съ высотою h и дугою въ главномъ сѣченіи α. Опредѣлить площадь самой большой діагональной плоскости, проведенной въ правильной восьмиугольной призмѣ, вписанной въ слой, и боковую поверхность призмы.

176. Опредѣлить поверхность шарового сектора, если дуга его главнаго сѣченія стягиваетъ сторону a_n правильнаго вписаннаго n– угольника.

177. Опредѣлить поверхность шарового пояса, если діаметры его основаній стягиваютъ дуги α и β, а площадь трапеціи, основаніями которой служатъ эти діаметры, равна S.

178. Опредѣлить поверхности шаровыхъ сегментовъ, если дуги круговыхъ суть α и β, а площадь трапеціи, основаніями которой служатъ хорды, соотвѣтствующія дугамъ α и β, есть S.

179. Въ шарѣ проведены два равныя параллельныя сѣченія. Опредѣлить поверхность полученныхъ пояса и шарового сегмента, если даны дуга сегмента въ главномъ сѣченіи $\alpha = 28°19'40''$ и площадь $S = 25$ кв. м. прямоугольника, у котораго одна сторона равна хордѣ, стягивающей дугу α, а другая—разстоянію между плоскостями сѣченія.

180. Въ большой кругъ шара вписанъ прямоугольный треугольникъ съ угломъ α и разностью катетовъ d. Опредѣлить разность полныхъ поверхностей сферическихъ секторовъ, у которыхъ дуги стягиваются хордами, равными катетамъ треугольника.

181. Въ шарѣ проведена плоскость, раздѣляющая его на два такихъ сегмента, что разность ихъ поверхностей въ $2\sqrt{3}$ болѣе площади круга сѣченія. Опредѣлить дуги (въ главномъ сѣченіи), соотвѣтствующія этимъ сегментамъ.

182. Опредѣлить объемъ и сферическую поверхность шарового сектора, если дуга кругового стягиваетъ сторону a_n правильнаго вписаннаго n—угольника.

Упр. Сдѣлать вычисленіе, если дуга кругового сектора соотвѣтствуетъ сторонѣ описаннаго 5—угольника въ 2 метра.

183. Опредѣлить объемъ шарового сегмента, если дуга его въ главномъ сѣченіи стягивается хордою, равною сторонѣ a_n правильнаго вписаннаго n—угольника.

Упражненіе. Опредѣлить объемъ, если $a=1$, $n=3$ и 4.

184. Опредѣлить объемъ шарового слоя, если діаметръ верхняго основанія a_n есть сторона правильнаго n—угольника вписаннаго въ главное сѣченіе шара, которое служитъ нижнимъ основаніемъ.

185. Опредѣлить поверхность пояса, если діаметръ верхняго основанія есть сторона a_n правильнаго вписаннаго n—угольника въ главное сѣченіе шара, которое служитъ нижнимъ основаніемъ.

186. На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса r надо провести плоскость сѣченія, чтобы объемъ шарового сектора раздѣлить въ отношеніи $m:n$, если дуга его въ главномъ сѣченіи α?

187. На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса r надо провести плоскость, чтобы поверхность шарового сегмента раздѣлилась въ отношеніи $m:n$, если дуга его главнаго сѣченія α.

188. На какомъ разстояніи отъ центра шара радіуса r надо провести плоскость, чтобы раздѣлить объемъ сектора въ крайнемъ и среднемъ отношеніи, если дуга его главнаго сѣченія α.

189. Въ шарѣ отдѣленъ сегментъ, діаметръ основанія котораго стягиваетъ дугу α. Затѣмъ криная поверхность сегмента пересѣчена плоскостью, проходящей черезъ конецъ діаметра основанія; опредѣлить, какой долженъ быть уголъ между діаметрами основанія и сѣченія, чтобы поверхности полученнаго сегмента и даннаго были въ отношеніи $m : n$.

Упражненіе. Полагая дѣленіе поверхности даннаго сегмента на равныя части и $\alpha = 180°, 120°, 90°$, вычислить уголъ между сѣкущей плоскостью и плоскостью основанія сегмента.

190. Въ шарѣ проведено сѣченіе черезъ конецъ діаметра основанія даннаго сегмента, образовавшее сегментъ съ поверхностью вдвое меньшею, чѣмъ у даннаго. Опредѣлить отношеніе объемовъ сегментовъ даннаго и полученнаго отъ сѣченія, если дуга даннаго сегмента въ главномъ сѣченіи 120° или 180°.

191. Въ шарѣ находится другой шаръ, діаметръ котораго равенъ радіусу перваго, причемъ этотъ шаръ касается внутренней поверхности бо́льшаго шара; если провести черезъ точку касанія плоскость, пересѣкающую оба шара не по ихъ діаметрамъ, то 1) каково будетъ отношеніе объемовъ отсѣченныхъ сегментовъ бо́льшаго шара и меньшаго, 2) какой уголъ образуетъ діаметръ сѣченія съ діаметромъ бо́льшаго круга, проходящаго черезъ точку касанія, если разность поверхностей сегментовъ бо́льшаго и меньшаго шаровъ равна поверхности меньшаго шара.

192. Опредѣлить объемъ шара, если два діаметра бо́льшаго круга образуютъ уголъ α, а разность хордъ, соединяющихъ конецъ одного изъ нихъ съ концами другого, есть d.

193. Въ шарѣ проведено сѣченіе, діаметръ котораго стягиваетъ дугу α; въ это сѣченіе вписанъ прямоугольный треугольникъ, медіана котораго, равная l, дѣлитъ прямой уголъ на части въ отношеніи 3 : 2. Найти объемы пирамидъ, общимъ основаніемъ которыхъ служитъ прямоугольный треугольникъ, а вершины ихъ лежатъ на концахъ діаметра, перпендикулярнаго къ сѣченію.

194. Въ шаровой секторъ съ дугою въ главномъ сѣченіи α вписанъ шаръ радіуса r. Опредѣлить поверхность шарового сегмента, у котораго дуга въ главномъ сѣченіи тоже α.

Упр. 1) Полагая $\alpha = 18°17'4''$, вычислить отношеніе поверхностей сегмента съ дугой главнаго сѣченія α и сегмента вписаннаго шара (съ одинаковыми высотами). 2) Найти условіе, при которомъ отношеніе поверхностей равно: 1) 3, 2) 4.

Отдѣлъ V.

Тѣла вращенія.

195. Равнобедренный треугольникъ, боковая сторона котораго равна радіусу R круга описаннаго, вращается около стороны основанія. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

196. Равнобедренный треугольникъ съ угломъ при вершинѣ $\alpha = 26°19'42''$ и радіусомъ $R = 1$ м. круга вписаннаго, вращается около оси, проходящей черезъ вершину угла при основаніи параллельно боковой сторонѣ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

197. Равнобедренный треугольникъ, у котораго линія c, соединяющая середину основанія съ серединой равной стороны, образуетъ съ ней уголъ α, вращается около прямой, проходящей черезъ вершину угла при основаніи перпендикулярно къ послѣднему. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

198. Опредѣлить отношеніе объемовъ двухъ тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія равнобедреннаго треугольника съ угломъ при основаніи α около одной изъ равныхъ сторонъ и основанія.

199. Равнобедренный треугольникъ съ угломъ при основаніи $\alpha = 56°18'20'',4$ и высотою $h = 2,7$ м. вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ конецъ высоты подъ угломъ α къ ней. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

200. Равнобедренный треугольникъ съ угломъ при вершинѣ $\alpha = 43°27'12''$ и перпендикуляромъ $h = 11,2$ м., опущеннымъ на одну изъ равныхъ сторонъ, вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ конецъ перпендикуляра подъ угломъ α къ равной сторонѣ. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

201. Правильный треугольникъ, у котораго радіусъ круга вписаннаго R, вращается около оси, проходящей черезъ одну изъ вер-

шинъ параллельно биссектору одного изъ угловъ. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

202. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ вершину острого угла параллельно медіанѣ проведенной изъ вершины прямого угла. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если медіана равна l и наклонена къ гипотенузѣ подъ угломъ α.

203. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ вершину прямого угла параллельно биссектору острaго угла 60°. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія, если длина биссектора l.

204. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ вершину прямого угла перпендикулярно биссектору того-же угла. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если одинъ катетъ $b=2{,}8$ м., а биссекторъ наклоненъ къ гипотенузѣ подъ угломъ $\alpha=67°49'37''$.

205. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ вершину прямого угла перпендикулярно медіанѣ изъ того-же угла. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если медіана l образуетъ съ гипотенузой уголъ α.

206. Прямоугольный треугольникъ съ катетомъ $b=8{,}7$ м. и противолежащимъ угломъ $\alpha=56°14'30''$ вращается около гипотенузы. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

207. Равнобедренный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его черезъ вершину угла α при основаніи параллельно линіи, соединяющей середину основанія съ серединой равной стороны $2a$. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

208. Тупоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей черезъ вершину тупого угла 120° перпендикулярно биссектору этого угла. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія, если стороны, прилежащія къ углу 120°, суть 2 и 4.

209. Тупоугольный треугольникъ съ угломъ $\alpha=32°18'10''$ и прилежащей меньшей стороной $a=10{,}5$ м. вращается около бо́льшей стороны. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если другая

меньшая сторона съ высотою изъ вершины тупого угла составляетъ уголъ $\beta=42°38'40''$.

210. Тупоугольный треугольникъ съ угломъ $\alpha=34°19'3''$ и прилежащей меньшей стороною $a=17{,}2$ м. вращается около бо́льшей стороны. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если высота относительно стороны a съ другой меньшей стороной образуетъ уголъ $\beta=42°17'23''$.

211. Равнобедренный треугольникъ съ основаніемъ b и угломъ при немъ α вращается около оси, параллельной основанію. Опредѣлить, на какомъ разстояніи отъ основанія находится ось вращенія, если объемъ тѣла вращенія втрое болѣе объема тѣла, полученнаго отъ вращенія треугольника около основанія.

212. Правильный треугольникъ съ радіусомъ r круга вписаннаго вращается около оси, проходящей черезъ середину его стороны параллельно биссектору одного изъ угловъ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если изъ тѣла, полученнаго отъ вращенія бо́льшей части треугольника, выдѣлить тѣло, полученное отъ вращенія меньшей части.

213. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія прямоугольника около оси, проходящей черезъ одну его вершину перпендикулярно діагонали d, которая образуетъ съ стороною уголъ α.

214. Прямоугольникъ, равновеликій равнобедренному треугольнику съ равнымъ бокомъ $2a$ и угломъ при вершинѣ α, вращается около оси, проходящей черезъ вершину одного угла и середину бо́льшей стороны. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если выдѣлить тѣло, полученное отъ вращенія меньшей части, и если стороны прямоугольника находятся въ отношеніи 1:2.

215. Ромбъ съ бо́льшей діагональю d и острымъ угломъ α вращается около оси, лежащей внѣ его параллельно сторонѣ на разстояніи d отъ точки пересѣченія діагоналей. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

216. Ромбъ, у котораго бо́льшая діагональ d составляетъ съ стороною уголъ α, вращается около оси, проходящей черезъ вершину острaго угла перпендикулярно къ сторонѣ. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

217. Ромбъ, у котораго бо́льшая діагональ d составляетъ съ стороною уголъ α, вращается около оси, проходящей черезъ вершину остраго угла параллельно другой діагонали. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

218. Найти отношеніе поверхностей и объемовъ тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія ромба около діагоналей, если острый уголъ α.

219. Ромбъ, у котораго меньшая діагональ $d=1{,}5$ м. и острый уголъ $\alpha=36^\circ 19' 17''$, вращается около стороны. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

220. Опредѣлить поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія параллелограмма около оси, проходящей черезъ одну его вершину параллельно бо́льшей діагонали, если эта послѣдняя образуетъ съ бо́льшей стороной $2a$ уголъ α, а меньшая сторона a.

221. Опредѣлить объемъ тѣла, полученаго отъ вращенія параллелограма около оси, проходящей черезъ одну его вершину параллельно бо́льшей діагонали $2d$, которая съ меньшей стороной d составляетъ уголъ α.

222. Квадратъ, равновеликій ромбу съ бо́льшей діагональю d и острымъ угломъ α, вращается около оси, проходящей черезъ середины двухъ смежныхъ сторонъ. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если выдѣлить тѣло, полученное отъ вращенія меньшей части квадрата.

223. Прямоугольная трапеція, у которой острый уголъ α, а діагональ d перпендикулярна къ боку, вращается около этого бока. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

Упр. Опредѣлить объемъ, если $\angle\alpha=60^\circ$, а бо́льшее основаніе 4 м.

224. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія прямоугольной трапеціи около бо́льшаго основанія $2a$, если острый уголъ ея α, а меньшее основаніе a.

225. Прямоугольная трапеція съ острымъ угломъ α вращается около меньшаго бока. Опредѣлить отношеніе поверхностей тѣла, полученнаго отъ вращенія трапеціи, и шара, главное сѣченіе котораго можетъ быть вписано въ данную трапецію.

226. Равнобочная трапеція вращается около оси, проходящей черезъ точку пересѣченія діагоналей перпендикулярно основанію. Опредѣлить поверхность тѣла вращенія, если острый уголъ трапеціи α и въ нее можно вписать кругъ радіуса R.

227. Въ кругѣ радіуса R отъ концовъ діаметра AB отложены дуги: AC равная α ($\alpha<90^\circ$) и BD равная β ($\beta<90^\circ$); точки C и D соединены съ центромъ O. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго *отъ вращенія треугольника COD около діаметра AB.*

228. Въ кругѣ радіуса R вписанъ прямоугольникъ, діагонали котораго составляютъ уголъ α; черезъ всѣ его вершины проведены касательныя. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія четыреугольника, ограниченнаго касательными, около одной его стороны.

229. Въ полуокружности съ діаметромъ AB проведена хорда MN такъ, что дуги AM и BN равны α; точки M и N соединены съ A. Опредѣлить поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія около діаметра фигуры, ограниченной прямыми AN и AM и дугою MN, если длина хорды MN есть a.

230. Равнобедренный треугольникъ съ стороною основанія b и угломъ при немъ α вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно высотѣ на разстояніи отъ нея равномъ длинѣ радіуса круга описаннаго. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

231. Равнобедренный треугольникъ съ бокомъ a и угломъ при вершинѣ α вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно высотѣ на разстояніи отъ нея въ n бо́льшемъ длины радіуса круга вписаннаго. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

232. Равнобедренный треугольникъ съ высотой (относительно неравной стороны) $h=13{,}85$ м. и угломъ при основаніи $\alpha=73^\circ 52' 36''$ вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно высотѣ на разстояніи отъ нея равномъ боку. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

233. Прямоугольный треугольникъ съ гипотенузою $a=34{,}6$ м. и угломъ $\alpha=35^\circ 20' 12''$ вращается около оси, параллельной катету противолежащему углу α и находящейся отъ него на разстояніи равномъ длинѣ гипотенузы. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

234. Прямоугольный треугольникъ съ катетомъ $b=21$ м. и противолежащимъ угломъ $\alpha=37^\circ 19' 20''$ вращается около оси, парал-

лельной этому катету и находящейся отъ него на разстояніи b. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

235. Прямоугольный треугольникъ вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно катету b на разстояніи отъ него равномъ трети высоты изъ прямого угла. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если ось образуетъ съ медіаной, проведенной изъ вершины прямого угла, уголъ α ($\alpha<90^\circ$).

236. Прямоугольный треугольникъ съ гипотенузой $2a$ вращается около оси, проходящей внѣ его параллельно катету на разстояніи отъ него равномъ $^2/_3$ медіаны, проведенной изъ вершины прямого угла. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если ось образуетъ съ высотою изъ прямого угла уголъ β ($\beta<90^\circ$).

237. При данныхъ въ условіяхъ задачъ № 235 и № 236, опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія одного и того-же прямоугольнаго треугольника.

238. Равнобедренный треугольникъ вращается около оси параллельной основанію; затѣмъ тотъ-же треугольникъ вращается около оси параллельной равной сторонѣ. Вывести условіе, при которомъ объемы полученныхъ тѣлъ вращенія равны.

239. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія кругового сегмента съ дугою $\alpha=46^\circ23'$ около діаметра $2r=2$ м., проведеннаго параллельно хордѣ сегмента.

240. Въ кругѣ проведены діаметръ AB и хорда AC, составляющая съ нимъ уголъ α и отстоящая отъ центра на h. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія сегмента, ограниченнаго дугою и хордою AC, около діаметра AB.

241. Въ кругѣ проведены діаметръ AB и хорда AC равная $a=1{,}8$ м., стягивающая дугу $\alpha=76^\circ39'27''$. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія сегмента AC около діаметра, перпендикулярнаго къ AB.

242. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены касательная AB и сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ O, при чемъ дуга BC=α. Опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія △ ABC и сегмента, ограниченнаго дугою и хордою BC, около сѣкущей.

243. При условіяхъ предыдущей задачи, опредѣлить отношеніе объемовъ тѣлъ, полученныхъ отъ вращенія △ ABC и сегмента около радіуса, проходящаго черезъ точку касанія.

244. Въ круговомъ секторѣ AOB съ дугою AB=$\alpha=40^\circ12'5''$ разстояніе точки A до радіуса OB равно $h=5{,}3$ м. Опредѣлить объемъ и сферическую поверхность шарового сектора, образованнаго вращеніемъ даннаго кругового сектора около средняго радіуса.

245. Круговой секторъ, у котораго центральный уголъ α равенъ $39^\circ19'27''$, вращается около крайняго радіуса. Опредѣлить объемъ и полную поверхность тѣла вращенія, если сферическая поверхность, имъ описываемая, есть $S=0{,}2$ кв. м.

246. Круговой секторъ AOB, у котораго центральный уголъ $\alpha=17^\circ6'16''$, а площадь △ AOB равна $S=3$ кв. м., вращается около крайняго радіуса. Опредѣлить объемъ и полную поверхность тѣла вращенія.

247. Опредѣлить объемъ и полную поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія кругового сектора около діаметра параллельнаго хордѣ сектора $a=0{,}4$ м., стягивающей дугу $\alpha=56^\circ8''$.

248. Опредѣлить объемъ и полную поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія кругового сектора около діаметра, перпендикулярнаго къ крайнему его радіусу, если хорда сектора $a=3{,}6$ м., стягиваетъ дугу $\alpha=72^\circ13'11''$.

249. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія кругового сектора около діаметра, перпендикулярнаго къ его хордѣ $a=2$ м., если она стягиваетъ дугу $\alpha=47^\circ18'25''$.

250. При условіяхъ предыдущей задачи опредѣлить полную поверхность тѣла вращенія.

251. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая ADE, проходящая черезъ центръ O, и другая ABC, которая составляетъ съ первой уголъ β и имѣетъ внутреннюю часть BC, стягивающую дугу α. Круговой секторъ BOC вращается около сѣкущей ADE; опредѣлить объемъ тѣлъ вращенія для двухъ случаевъ: 1) сѣкущая ABC=a и 2) внѣшній ея отрѣзокъ AB=a.

252. При условіяхъ задачи № 251 опредѣлить полную поверхность тѣлъ вращенія для тѣхъ же двухъ случаевъ.

Упражненіе. При условіяхъ предыдущей задачи опредѣлить объемъ и полную поверхность тѣла вращенія, если внутренняя часть сѣкущей $BC=2$ м., $\angle\alpha=48°17'39''$, $\angle\beta=21°6'12''$.

253. Въ кругѣ отъ конца A діаметра AB отложены дуги AC и CD; сумма ихъ α, а хорда $CD=a$ непараллельна діаметру. Объемы тѣлъ, происшедшихъ отъ вращенія секторовъ AOC и COD около AB, равны; опредѣлить одинъ изъ нихъ.

Упражненіе. Опредѣлить объемъ, если CD ∥ AB.

254. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведены сѣкущая ABD, проходящая черезъ центръ O, и касательная AC. Объемъ тѣла, происшедшаго отъ вращенія около сѣкущей фигуры ABC, ограниченной прямыми AB, AC и дугою BC, въ n менѣе объема тѣла, образованнаго вращеніемъ около той-же оси кругового сектора BOC. Опредѣлить уголъ между сѣкущей и касательной.

255. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведена сѣкущая ABD, проходящая черезъ центръ O, и касательная AC. Поверхность тѣла, образованнаго вращеніемъ около сѣкущей фигуры ABC, въ n болѣе сферической поверхности тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сектора BOC около той же оси. Опредѣлить уголъ между сѣкущей и касательной.

256. Изъ точки A, взятой внѣ круга, проведена касательная $AB=a$ и сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ и составляющая съ касательной уголъ α. Фигура ABC, ограниченная прямыми AB, AC и дугою BC, *вращается около діаметра перпендикулярнаго къ* сѣкущей. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

257. При условіяхъ предыдущей задачи вычислить поверхность тѣла вращенія, полагая $a=1$ м., $\alpha=32°9'6''$.

258. Изъ точки A, взятой внѣ круга радіуса $R=0{,}2$ м., проведена касательная AB и сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ O. Фигура ABC вращается около радіуса OB, причемъ $\angle AOB=\alpha=22°10'36''$. Опредѣлить объемъ тѣла *вращенія.*

259. При условіяхъ предыдущей задачи опредѣлить поверхность тѣла вращенія.

260. Изъ точки A, взятой внѣ круга радіуса R, проведена касательная AB и сѣкущая ACD, проходящая черезъ центръ O.

Фигура ABC, ограниченная дугою $BC=\alpha$ и прямыми AB и AC, вращается около діаметра параллельнаго касательной. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

261. При условіяхъ предыдущей задачи опредѣлить поверхность тѣла вращенія, если даны дуга $BC=\alpha$ и $OA=a$.

262. Изъ точки A діаметра AB подъ угломъ α къ нему проведена хорда $AC=a$ и продолжена до точки D на разстояніе a; затѣмъ изъ точки D проведена сѣкущая DBE. Фигура CDB, ограниченная внѣшнею частью DB сѣкущей, прямою CD и дугою BC, вращается около AB. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

263. Двѣ окружности O и O′ одинаковыхъ радіусовъ касаются въ точкѣ N; на линіи OO′ построенъ равнобедренный $\triangle OCO'$, при чемъ бока его OC и O′C пересѣкаютъ окружности O и O′ въ точкахъ A и B. Опредѣлить объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія около OO′ фигуры ACBN, ограниченной прямыми AC, CB и дугами AN и BN, если дуга $AN=\alpha=47°16'$ стягивается хордою $a=1{,}3$ м.

264. Діаметръ AB круга радіуса R продолженъ на разстояніе BC и изъ точки C проведена касательная CD; затѣмъ изъ точки D проведена хорда DE параллельная діаметру AB. Поверхности, описанныя вращеніемъ около AB дуги BDE и фигуры BCD, ограниченной прямыми CB, CD и дугою DB, равны; опредѣлить $\angle BCD$ и объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія около той-же оси фигуры, ограниченной прямыми BD и BE и дугою ED.

265. Въ полукругѣ радіуса $R=0{,}8$ м. проведена хорда CD, параллельная діаметру AB и стягивающая дугу $\alpha=78°27'35''$. Фигура ACDB, ограниченная дугами AC, DB и прямыми CD и AB, вращается около AB. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

266. Въ полукругѣ радіуса $R=1{,}7$ м. проведена хорда CD, параллельная діаметру AB и стягивающая дугу $\alpha=102°13'9''$; затѣмъ изъ точки D опущенъ перпендикуляръ DE на AB и точка E соединена съ C. Фигура, ограниченная прямыми DE, EC и дугою DC, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

267. Въ полукругѣ радіуса R проведена хорда DC, параллельная діаметру AB и стягивающая дугу α; точка D соединена съ центромъ O, а изъ точки C опущенъ перпендикуляръ CE на діа-

метръ AB. Фигура, ограниченная прямыми DO, OE, EC и дугою CD, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

268. Въ полукругѣ радіуса $R=0{,}5$ м. проведена хорда CD, параллельная діаметру AB, причемъ дуга $DB=\alpha=49°36'12''$; затѣмъ точка D соединена съ центромъ O, а точка C съ A. Фигура, ограниченная прямыми OD, AO, AC и дугою CD, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

269. Въ полукругѣ изъ конца A діаметра AB проведена хорда AC. Опредѣлить уголъ CAB, если объемъ тѣла, полученнаго отъ вращенія около AB фигуры ACB, вдвое болѣе объема тѣла, полученнаго отъ вращенія сегмента AC.

270. Въ полукругѣ радіуса R на діаметрѣ AB построенъ равнобедренный $\triangle$ ACB съ угломъ при основаніи $\alpha < 45°$. Фигура, ограниченная полуокружностью и равными боками треугольника AC и CB, вращается около діаметра. Опредѣлить объемъ и поверхность тѣла вращенія.

271. На діаметрѣ AB полукруга радіуса R построенъ равнобедренный $\triangle$ ABC съ угломъ при основаніи α; бока AC и BC пересѣкаютъ полуокружность въ точкахъ D и E. Фигура, ограниченная прямыми CD, CE и дугою DE, вращается около діаметра AB. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

272. Правильный n—угольникъ съ четнымъ числомъ сторонъ вращается около оси, параллельной одному изъ діаметровъ и находящейся на разстояніи $2a$ отъ центра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если длина стороны многоугольника a.

273. Кругъ, въ которомъ хорда a стягиваетъ дугу α, вращается около оси, находящейся на разстояніи діаметра отъ центра. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія.

274. Опредѣлить разность между объемами внѣшней и внутренней частей многограннаго кольца, происшедшаго отъ вращенія правильнаго вписаннаго n—угольника въ кругъ радіуса R, около оси, параллельной одному изъ діаметровъ.

275. Опредѣлить разность между объемами внѣшней и внутренней частей круглаго кольца, происшедшаго отъ вращенія круга около оси, параллельной діаметру, если дана длина a стороны правильнаго вписаннаго въ кругъ n—угольника.

276. Полуокружность, въ которой хорда a стягиваетъ дугу α, вращается около оси, находящейся на разстояніи радіуса отъ центра и параллельной діаметру. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если полуокружность обращена выпуклостью въ сторону противоположную оси.

277. Полуокружность, въ которой хорда a стягиваетъ дугу α, вращается около оси, находящейся на разстояніи радіуса отъ центра и параллельной діаметру. Опредѣлить объемъ тѣла вращенія, если полуокружность обращена выпуклостью къ оси.

278. Полуокружность вращается около оси, находящейся на разстояніи діаметра ея отъ центра и параллельной діаметру. Опредѣлить выпуклую поверхность тѣла вращенія, если полуокружность обращена выпуклостью: 1) въ сторону противоположную оси и 2) къ оси; причемъ извѣстна длина a стороны правильнаго вписаннаго въ полуокружность n—угольника.

279. На прямой AB описаны два равные полукруга, обращенные выпуклостью въ разныя стороны; въ одномъ изъ нихъ проведена хорда $AC=a$, составляющая съ AB уголъ α. Опредѣлить объемъ и боковую поверхность тѣла, происшедшаго отъ вращенія этихъ полукруговъ около оси, параллельной AB и находящейся отъ нея на разстояніи равномъ половинѣ длины AB.

Упражненіе. Полагая $a=1$ м., $\alpha=16°17'30''$, вычислить объемъ тѣла, кривая поверхность котораго описана полуокружностями, а основанія суть круги, происшедшіе отъ вращенія перпендикуляровъ AD и BE, опущенныхъ изъ концовъ прямой AB на ось вращенія DE.

280. На полуокружности радіуса R отъ конца B діаметра AB отложена дуга BC равная α ($\alpha < 90°$), а изъ C опущенъ перпендикуляръ CD на діаметръ. Опредѣлить боковую поверхность тѣла, полученнаго отъ вращенія дуги BC около оси CD.

Упражненіе. 1) Разобрать случаи, когда $\alpha=30°, 45°, 60°$ и $90°$. 2) Опредѣлить боковую поверхность, если дуга BC стягивается стороною a_n правильнаго вписаннаго n—угольника.

ОТВѢТЫ и РѢШЕНІЯ.

Логарифмическія вычисленія произведены съ помощью таблицъ Лаланда. ($\lg\pi=0{,}49715$).

---

1. $32°12'15'':147°47'45'':15:13$. **2.** $\dfrac{R\sqrt{2}\,\sin 2\alpha}{2\sin(45°+\alpha)}$.

3. Линія, соединяющая середину гипотенузы съ вершиной прямого угла, вдвое менѣе гипотенузы. Радіусъ круга будетъ $l.\cos\frac{\alpha}{2}.\sec\alpha$. **4.** $\frac{2}{3}r.\sin\alpha$; $\frac{4}{3}r.\sin\alpha$.

5. Принимая во вниманіе свойство сторонъ описаннаго четыреугольника, найдемъ $2a.\sec^2\frac{\alpha}{2}$.

6. $\dfrac{a\sin\beta}{2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}}$, $\dfrac{a\sin\beta.\sin(\alpha+\beta)}{\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}.\sin\alpha}$.

7. Если трапенія вписана въ кругъ, то она обязательно равнобочная, а потому: 1) углы при основаніи равны, 2) діагонали равны и 3) соотвѣтственные отрѣзки ихъ равны.

$6r.\sin\frac{\alpha}{2}.\sec^2\varphi=8{,}9068$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{3}\sin\frac{3\alpha}{2}.\csc\frac{\alpha}{2}$.

8. Радіусъ круга, вписаннаго въ прямоугольный треугольникъ, *у котораго гипотенуза и катеты суть* a, b, c, равенъ $\frac{1}{2}(b+c-a)$. Искомый радіусъ $0{,}5c.(\sqrt{3}-1)$.

9. Полагая $\angle ADB=y$, радіусъ круга O равнымъ r, выразимъ искомое отношеніе въ видѣ $\dfrac{r}{2\sin y}:\dfrac{r}{2\sin(90-y)}$ или $\dfrac{\cos y}{\sin y}$, а послѣднее изъ $\triangle$ ABC можно замѣнить черезъ 2:1.

10. $\operatorname{tg}x=\cos 36°.\cos 45°$; $x=29°46'21''$, если бо́льшій отрѣзокъ—конецъ касательной; $\operatorname{tg}x=\cos^2 36°.\sec 45°$; $x=42°47'16''$, если меньшій отрѣзокъ—конецъ касательной. **11.** $r\sqrt{3}$ и $r\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

12. $\sin x=\sqrt{5}-2$; $x=13°39'27''$, если внѣшняя часть больше діаметра; $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$, $x=26°33'54''$, если она меньше діаметра.

13. $\dfrac{a}{4\cos^2\alpha}$, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos\alpha}.\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

14. $\sin\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{2}{n(n+1)}}$. **15.** $\sin x=\dfrac{2\sqrt{n}}{n+1}$.

16. Треуг. APQ и AMN подобны. $\dfrac{a(n+1)}{2(n-1)}.\csc\frac{\alpha}{2}$.

17. $\dfrac{an\sqrt{2}.\sin\frac{\alpha}{4}.\sin\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}{(n-1).\sin\frac{\alpha}{2}}$. *Упр.* $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}.\sec 15°$ м.;

$\frac{3}{8}.\sec^2 22°30'$; $\frac{\sqrt{6}}{8}.\sec 15°$. **18.** $(\sqrt{2}+1)$ м.; $0{,}5(\sqrt{3}+1)$ м.

19. $\dfrac{r\operatorname{tg}\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\dfrac{r}{2\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

20. $2R\sqrt{2}.\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **21.** $0{,}5a$ м.

22. $1{,}5a\sqrt{2-\sqrt{3}}$. *Упр.* $\frac{a}{3}(2\sqrt{3}+3)$.

23. 1) $a.\sin\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right).\csc\alpha$. 2) $a.\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right).\csc\alpha$.

24. $\frac{a}{2}\sqrt{2}.\csc\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{1}{2}a\sqrt{2}.\csc\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)$.

25. $\sin x=\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{17}\right)$; $x=39°49'16''$.

26. Замѣчая, что $\cos\angle MAB=\frac{1}{n}$ и что треуг. MLB и KDB подобны (ML и KD—перпендикуляры изъ точекъ M и K на діаметръ), найдемъ: $\dfrac{an^2}{2}\sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$. **27.** $(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ м.

28. $a_n=2r.\sin\frac{180^\circ}{n}$; $a_{2n}=2r.\sin\frac{90^\circ}{n}$; $b_n=2r.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$; $b_{2n}=2r.\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{n}$. **29.** $\cos(45^\circ-x)=\frac{2r+a}{a\sqrt{2}}$. **30.** $0{,}5\sec^2\alpha$. *Упр.* $\frac{2}{3}$, 1,2.

31. Соединивъ центры круговъ O и O', вписанныхъ въ $\triangle\triangle$ ABD и ADC, соотвѣтственно съ концами катетовъ AB и AC, легко убѣдиться, что $\triangle\triangle$ AOB и AO'C подобны; а потому $\operatorname{tg}C=\frac{r}{R}$; $\operatorname{tg}B=\frac{R}{r}$. **32.** $\sin x=\sqrt{m(2-n)}$, $\sin y=\sqrt{\frac{n}{2}}$.

33. $\sin x=\frac{m-2r}{2R}$; $x=23^\circ14'32''$.

34. Полагая $r=\frac{1}{2}(b+c-a)$ (см. № 8) и введя углы, убѣдимся, что искомый треугольникъ равнобедренный.

35. $R=r.\csc\frac{90^\circ}{n}$; апоѳема $=r.\cos^2\frac{90^\circ}{n}$.

36. Замѣтивъ, что разность сторонъ AB и AC равна a, найдемъ $a.\sin\frac{\beta}{2}.\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sec\frac{\alpha+2\beta}{2}$. **37.** $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$. **38.** $\sin 2x=\frac{h}{a}$; ah.

39. Замѣчая, что одна часть линіи NK вдвое менѣе касательной, а другая $0{,}5r\sqrt{3}$, нетрудно опредѣлить площадь MNK въ видѣ $\frac{r^2.\sin(\alpha+30^\circ)}{4\sin\alpha}$.

40. Сторона, прилежащая къ углу 30°, есть $2a$ (см. № 3). Углы суть φ и $150^\circ-\varphi$, причемъ $\sin\varphi=\frac{a}{b}$; площадь будетъ

$$\frac{a^2}{2}\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}\right).$$ **41.** $\sin^2\alpha$.

42. Одна діагональ $2a$ (см. № 3). $2a\sqrt{\frac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}}=4{,}836$ м.

43. $0{,}5a^2.(6-\sqrt{3})$. **44.** $\frac{4}{3}\pi S\sin^2 15^\circ$. **45.** $a_n=2d.\operatorname{ctg}\frac{90^\circ}{n}$; $b_n=2d\frac{\operatorname{ctg}\frac{90^\circ}{n}}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$; $nd^2.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.\operatorname{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}$; $2nd^2.\operatorname{ctg}^2\frac{90^\circ}{n}.\csc\frac{360^\circ}{n}$.

46. $\operatorname{tg}x=\sin 2\alpha.\cos^2\varphi$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}.\cos\alpha$. *Упр.* 19°6′23″.26°33′54″.

47. $S.\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{4}.\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{4}=38{,}929$ кв. м. Означая діагональ и бокъ трапеціи черезъ x и y, легко найдемъ $\frac{xy}{2}$, а затѣмъ уже и площадь $\frac{xy}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)$. **48.** $\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}\right)$.

49. $\frac{a^2n^3}{2}\frac{n^2-1}{n^2+1}$. **50.** $0{,}25\csc^2\frac{\alpha}{2}$. $\triangle$ BMC и AMC подобны.

51. Треуг. APQ и AMN подобны. $\frac{1}{6\cos\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{a.\sin\alpha}{6\sin^2\left(45^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)}$.

52. Если дана сторона a_n, то площади n-угольниковъ будутъ: вписаннаго $\frac{1}{4}na_n^2.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$, описаннаго $\frac{1}{2}na_n^2.\csc\frac{360^\circ}{n}$. Если дана сторона b_n, площади: вписаннаго $\frac{1}{4}nb_n^2.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.\cos^2\frac{180^\circ}{n}$, описаннаго $\frac{1}{4}nb_n^2.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. **53.** $2r^2.\sin\alpha.\sin^2\frac{\alpha}{2}=2{,}108$ кв. м.

54. $\frac{h^2(m+n)}{2m}.\operatorname{tg}\alpha$. **55.** $a.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $a.\csc 2\alpha$. **56.** $\operatorname{tg}x=\frac{3}{4}$; $x=36^\circ52'11''$. **57.** $\frac{1}{4}S$. **58.** $2r^2.\csc\alpha=12{,}232$ кв. м.

59. Означая точки касанія съ сторонами AB и AC соотвѣтственно черезъ E и F, найдемъ: BE—CF$=m$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{2r}{a+m}$, $\angle B=3^\circ50'3''$, $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{2r}{a-m}$, $\angle C=9^\circ3'27''$, площадь$=\frac{a^2.\sin B.\sin C}{2\sin A}=$ $=42{,}61$ кв. м.

60. $\frac{bl\sqrt{3}}{4}$; $\operatorname{tg}\angle BCD=\frac{l\sqrt{3}}{b}$. Прямая BD пойдетъ внутри $\triangle$ ABC. *Упр.* 132°35′18″; 23°42′21″.

61. $\frac{bl\sqrt{3}}{4}$; $\operatorname{tg}\angle A=\frac{l\sqrt{3}}{b}$. Прямая BD пойдетъ внѣ $\triangle$ ABC. *Упр.* 72°57′24″; 34°5′12″.

62. Продолживъ линіи EF и AC до встрѣчи въ точкѣ D, найдемъ, что пл. AEFC=пл. DFC—пл. DEA$=0{,}5\,(m^2-a^2)\operatorname{ctg}\alpha$.

63. $\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{a}{m}$. **64.** 1) $\operatorname{Cs} x=\frac{h}{H}$, гдѣ x—уголъ при основаніи; 2) $\frac{2h(H-h)}{H^2}$. **65.** $\frac{a^2}{2}\operatorname{sn}\alpha=38{,}486$ кв. м. *Упр.* 1) 3. 2) 30°, 120°.

66. При $\alpha<45°$ и $\alpha>45°$ имѣемъ $\pm\frac{d^2}{2}\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{cs}2\alpha$; $\pm 2\operatorname{cs}^2\alpha$.

67. Опредѣливъ длину хорды BD и пл. $\triangle\triangle$ ABD и BDC, найдемъ площадь $ABDC=\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\operatorname{cs}^2(\alpha-30°)=11{,}223$ кв. м.

68. $\operatorname{Cs}(30°-x)=\frac{n+1}{n}\cdot\operatorname{sn}60°$; пл. $ABCD=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

69. $\frac{1}{2}a^2.\operatorname{sc}^2\frac{\varphi}{2}.\operatorname{sn}2\alpha=0{,}11718$ кв. ед., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=0{,}5.\operatorname{sc}\alpha$.

70. Отношеніе сторонъ параллелограмма $m:n$; отсѣченный $\triangle$ равнобедренный. $\frac{d^2(2n-m)}{4n}.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. **71.** 2: 1; $6r^2.\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}.\operatorname{sn}\alpha$.

72. $\operatorname{Ctg}^4\frac{\alpha}{2}$. **73.** $\frac{1}{2}a^2.\operatorname{sc}\varphi.\operatorname{sn}\alpha$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=3\operatorname{sn}^2\alpha$.

Упр. 0,14181, 0,33072, 0,55902, 0,78063, 0,94133 кв. м.

74. Діагональ равна $2a$. Площадь $\frac{n+1}{n}.a^2.\operatorname{sn}2\alpha$

75. $\frac{n+1}{n-1}\cdot\frac{d^2\operatorname{sn}2\alpha}{2}$. **76.** (См. № 3). $R.\operatorname{tg}27°.\operatorname{sn}72°$; 54°; 72°. Если уголъ при основаніи φ, то $\operatorname{sn}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}=\operatorname{cs}36°$.

77. $\frac{r^2}{2}.\operatorname{sn}\alpha.\operatorname{tg}^2\alpha$. **78.** $1:\operatorname{sn}\alpha.\operatorname{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)=2{,}2999$; *Упр.* 2.

79. $\operatorname{sc}^2\frac{\varphi}{2}=1{,}0951$, гдѣ $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}\alpha$. **80.** $\frac{S}{\pi}.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=12{,}572$ кв. м.

81. $4r^2\sqrt{n^2-1}.\operatorname{sn}^2\frac{\alpha}{2}$. *Упр.* $r^2\sqrt{3}$; $2r^2\sqrt{3}$; $3r^2\sqrt{3}$.

82. $\frac{4\operatorname{sn}\alpha}{2+\operatorname{cs}\alpha}$. *Упр.* $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **83.** $4r^2.\operatorname{sn}^2\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right).\operatorname{csc}\alpha=30{,}976$ кв. ед.

84. $\frac{r^2}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; $\frac{r^2}{2}\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **85.** (см. № 31). $\frac{h^2(r^2+R^2)}{2rR}$.

86. $2r^2.\operatorname{sn}\alpha.\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}.\operatorname{sc}^2\frac{\varphi}{2}=8{,}5574$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}=0{,}5\operatorname{csc}^2\frac{\alpha}{2}$.

87. $\operatorname{sn}\frac{x}{2}=\sqrt[4]{\frac{n}{4(m+n)}}$. **88.** 151°55′40″; 28°4′20″.

89. $40r^2\operatorname{cs}18°.\operatorname{cs}^436°$. **90.** $4{,}5a^2\sqrt{3}$. *Упр.* $6\sqrt{3}$ кв. м.

91. $\frac{na^2}{4}.\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}.\frac{\operatorname{cs}^2\frac{180°}{n}}{\operatorname{cs}^2\frac{360°}{n}}$. **92.** $r^2.\operatorname{ctg}\alpha.\operatorname{sn}^2\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)=50{,}28625$.

93. Замѣтивъ, что средняя линія трапеціи есть $d.\operatorname{cos}\alpha$, найдемъ площадь $\frac{1}{2}d^2\operatorname{sn}2\alpha$. **94.** $\frac{b^2}{2}.\operatorname{tg}2\alpha.\frac{\operatorname{sn}^2\alpha}{\operatorname{cs}2\alpha}=229{,}032$ кв. дц.

95. $\frac{3r^2\sqrt{2}}{\operatorname{sn}\alpha}.\operatorname{sn}\frac{\alpha+\varphi}{2}.\operatorname{cs}\frac{\alpha-\varphi}{2}=5{,}4201$ кв. м., гдѣ $\operatorname{sn}\frac{\varphi}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

96. $2{,}5\ d^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, или $2{,}5\ d^2.\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

97. Означая центры круговъ черезъ O, O', O'' и радіусы $OA=OC=a$, $O'C=O'B=c$, $O''B=O''A=b$, изъ $\triangle$ $OO'O''$ найдемъ $\operatorname{sn}\frac{\angle OO''O'}{2}=\sqrt{\frac{ac}{(a+b)(b+c)}}$, $\operatorname{sn}\frac{\angle O'OO''}{2}=\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}}$. Затѣмъ, опредѣливши стороны AB и AC и $\angle$ BAC, найдемъ площадь $\triangle$ $ABC=\frac{2abc\sqrt{abc(a+b+c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)}$. Если же замѣтить, что касательныя a, пересѣкающіяся внутри $\triangle$ ABC, равны между собою, площадь $\triangle$ ABC можно представить въ видѣ $\frac{a^2}{2}(\operatorname{sn}\angle OO''O''+\operatorname{sn}\angle OO''O'+\operatorname{sn}\angle O'OO'')$ и получить тотъ-же результатъ. **98.** $1{,}2r^2$. **99.** $\frac{3}{5}\pi h^2$.

100. $\frac{2}{3}a^2.\operatorname{sn}2\alpha$. Площ. $\triangle$ AEB и CED равны. *Упр.* $\frac{5}{6}a^2.\operatorname{sn}2\alpha$.

101. Опредѣливъ среднюю линію трапеціи (см. № 93), найдемъ площадь $\frac{a^2.\operatorname{sn}2\alpha}{8\operatorname{sn}^4\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}=1{,}2691$ кв. дц. **102.** 30°, 120°.

103. $S.\operatorname{sn}^4\frac{\alpha}{2}.\operatorname{sc}\alpha$. **104.** Оба отношенія равны $\operatorname{cs}\alpha$.

105. Выразивъ въ радіусѣ площади, найдемъ $\frac{\sin^2\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 2\varphi.\sin\alpha}$.

106. $a^2.\cos^2\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha.\sec^2\varphi$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{(180^\circ-\alpha).\pi}{180^\circ.\sin\alpha}$.

107. $4a\sqrt{r^2-a^2}.\cos^2\frac{\alpha}{2}$. Средняя линія трапеціи $2a.\cos\frac{\alpha}{2}$.

108. Проведя изъ центра меньшей окружности линію параллельную касательной и найди $\cos\varphi=\frac{n-1}{n+1}$, гдѣ φ означаетъ острый уголъ, образованный линіей центровъ съ діаметромъ BD бо́льшаго круга, найдемъ площадь $MCD=\frac{2ar^2\sqrt{n}}{n+1}$.

Упр. $\operatorname{tg}\alpha=n\sqrt{n}$; 82°52′30″; 3,2 кв. м.

109. Проведя средній радіусъ OC сектора AOB, найдемъ $OC=\frac{2r.\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$, а затѣмъ и площадь $4r^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)=$ $=5{,}6463$ кв. м. **110.** Опредѣливши углы и стороны полученнаго многоугольника, найдемъ его площадь $\frac{na^2}{2}.\operatorname{ctg}\frac{360^\circ}{n}.\cos\frac{360^\circ}{n}$.

111. $4r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}.\sec\alpha=4{,}1769$ кв. м.

112. $2\cos^2\frac{\alpha}{4}$ или $2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)$, смотря по тому, какою діагональю раздѣлимъ ромбъ на треугольники. Радіусъ круга, вписаннаго въ ромбъ съ стороною a и острымъ угломъ α, есть $\frac{a}{2}.\sin\alpha$.

113. $6a^2\sqrt{3}$; $2a^2\sqrt{3}$.

114. $R^2.\sin\alpha.\sec^2\varphi=3{,}1224$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{(180^\circ-\alpha).\pi}{180^\circ.\sin\alpha}$.

115. $\frac{a^2.\sin\alpha.\sin(\varphi-\alpha)}{8\sin^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).\sin\varphi}$, гдѣ $\operatorname{ctg}\varphi=\frac{\pi(90^\circ-\alpha)}{180^\circ}$.

116. $\frac{R^2.\cos2\alpha.\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\alpha.\cos\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{(45^\circ-\alpha).\pi}{90^\circ.\cos2\alpha}$.

117. $\sin\alpha=\sin\beta.\sin\gamma$; $\cos\beta=\operatorname{ctg}\gamma.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$; $\cos\gamma=\cos\alpha.\sin\frac{180^\circ}{n}$; $\sin\frac{\beta}{2}=\cos\frac{180^\circ}{n}.\csc\gamma$. **118.** 1) и 4) 70°31′43″. 2) и 3) 54°44′7″. **119.** 32°25′15″; 65°2′5″; 49°55′50″. **120.** 46°2′43″; 69°31′42″; 55°14′9″. **121.** $\cos x=0{,}25\sqrt{2}$; $x=69°17'43''$; $\sqrt{2}:2$.

122. $\cos x=0{,}3125$; $x=71°47'23'',7$. *Указ.* Площадь основанія прямой призмы равна площади сѣченія, умноженной на косинусъ угла между ними. **123.** $\operatorname{tg}x=2(n-1)$. **124.** $\cos x=0{,}6$; $x=53°7'49''$.

125. $\sin x=\frac{8}{17}$; $x=28°4'20''$; $4\sqrt{3}:15$. **126.** $2S(n+\cos\alpha)=1527{,}1$ кв. м.

127. $\frac{S.\cos\frac{\alpha}{2}}{3\sin^2\varphi}=0{,}77594$ кв. м., гдѣ $\cos^2\varphi=\frac{2}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

128. $\frac{S\sin(\alpha+\varphi)}{\sin\alpha.\cos\varphi}=36{,}432$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{3}$.

129. $2a^2.\sin^2\alpha.\cos\frac{\alpha}{2}=79{,}383$ кв. м. **130.** $\frac{1}{8}b^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\csc\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\beta=$ $=8300{,}6$ кб. м. **131.** $\frac{1}{4}h^2\operatorname{tg}^2\beta.\sin2\alpha=68{,}438$ кб. м.

132. $\frac{1}{2}d^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta=35{,}7275$кб.м. **133.** $a^2\sin\alpha.\operatorname{ctg}\beta=1493{,}8$ кб. м.

134. (см. № 3). $2nd^2.\sin2\alpha$. **135.** $\frac{nd^2(m+1)}{m-1}.\sin\alpha.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

136. $\frac{\sec^2\varphi}{2\sin(30^\circ+\alpha)}$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\sin\alpha}{\sin60^\circ.\sin(30^\circ+\alpha)}$.

Упр. $3a^2\sqrt{3}.\sin^2(30^\circ+\alpha)=107{,}68$ кб. м.

137. $\frac{\sin60^\circ.\sec^2\varphi}{\sin(60^\circ+\alpha)}$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{2\sin\alpha}{\sin(60^\circ+\alpha)}$. *Упр.* $\alpha=60^\circ$.

138. $\frac{na^2}{2}\sin2\alpha.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$; $\frac{na^2}{6}\sin2\alpha.\cos\alpha.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$.

139. $\frac{2h^2\sqrt{3}}{3}.\operatorname{ctg}^2\alpha$; $h^2\sqrt{3}.\cos\alpha.\csc^2\frac{\alpha}{2}$.

140. $21\sqrt{7}$ кб. м.; $63\sqrt{3}$ кв. м.

141. $\frac{nh^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}}{6\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{nh^2.\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

142. $\frac{na^3}{12}\sin2\alpha.\cos\alpha.\sin\frac{360^\circ}{n}$. **143.** $\frac{P\sin\alpha}{3}\sqrt{\frac{P\cos\alpha}{n.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}}$.

144. $\frac{na^2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{180^\circ}{n}}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}$; $\frac{na^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}}{6\sin^2\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

145. $\frac{7na^3\operatorname{tg}\alpha}{192\operatorname{tg}^2\frac{180^\circ}{n}}$. 146. $\frac{n(n^2-1)}{6}r^3.\operatorname{tg}\alpha.\sin\frac{360^\circ}{n}$.

147. $\frac{n(n^2-1)}{3}r^3.\operatorname{tg}\alpha.\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}$. 148. $\frac{a^2b.\sin\alpha.\sin\beta.\cos\gamma}{6\sin(\alpha+\beta)}=4619{,}3$ кб. м.

149. $\frac{a^3}{6}.\sin\alpha.\operatorname{tg}\beta=212{,}49$ кб. м. 150. $\frac{h^3\sqrt{3}}{12\operatorname{tg}^2\alpha}=154{,}407$ кб. м.

151. $\frac{a^3}{24}\sin2\beta.\sin2\alpha.\cos\beta=6{,}405$ кб. м. 152. $\frac{4}{3}a^3.\cos^3\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha=$
$=654{,}6$ кб. м. 153. $\frac{7b^3}{192\cos^2\alpha}=154{,}089$ кб. м. 154. $\frac{7}{24}d^3.\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}=$
$=944{,}56$ кб. м. 155. $\frac{K^3.\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^2\alpha}{\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$. 156. $\frac{\pi r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}+\frac{3\sqrt{3}\,r^2}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$.

157. $\frac{4}{3}R^3.\sin^2\alpha.\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right).\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$.

158. $\frac{2\sqrt{3}\,r^2.\sin(30^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}$. 159. $\frac{h}{2\sin^2\alpha}$.

160. $\frac{a}{2}.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{180^\circ}{n}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$. 161. $\frac{\pi a^3.\operatorname{ctg}\beta}{24\sin^3\frac{\alpha}{2}}=$
$=480{,}24$ кб. м. 162. $\frac{7\pi l^3.\sin2\alpha}{6\cos\alpha}=16299{,}6$ кб. м. 163. $\frac{\pi a^3.\sin2\alpha}{8\cos\alpha}=$
$=114{,}535$ кб. м. 164. $\frac{8\pi r^2\sqrt{3}}{3\sin^2\alpha}$. 165. $\frac{4K}{\sin^2\alpha}$. $2K\sqrt{\frac{K}{\pi}.\frac{\sec^2\varphi}{\sin^2\alpha}}$,
где $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{3}}$. 166. $\frac{2\pi r^3}{3\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 167. $\frac{\pi R^3.\sin^2\alpha}{2\sec^2\frac{\alpha}{2}}$. 168. $73^\circ44'22'';4$.

169. $\frac{K}{3}\sqrt{\frac{K}{\pi}}\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}^3\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 170. Бок. п. $\frac{S.\csc^2\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{S}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

171. $\frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.\sin\alpha.\sin\frac{\alpha}{2}$. 172. $\frac{S.\cos^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}$. 173. $\frac{S}{\sin^2\frac{\alpha}{4}}$,
$\frac{S}{2}\sqrt{\frac{S}{\pi}}.\operatorname{Ctg}^2\frac{\alpha}{4}$. 174. $\operatorname{Ctg}\frac{\varphi}{4}=\sqrt{\frac{n-1}{3}}$; $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{4}=\sqrt{n}$.

175. $\text{Пл.}=0{,}5b^2.\sin\alpha.\csc^4\frac{\alpha}{4}$; $\text{P}=4b^2.\sin22\frac{1}{2}^\circ.\sin\alpha.\csc^4\frac{\alpha}{4}$.

176. $\frac{\pi a_n^2\sec^2\varphi}{4\cos^2\frac{90^\circ}{n}}$, где $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{2\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{n}}$. 177. $\frac{\pi S}{\sin\frac{\alpha+\beta}{4}.\cos\frac{\alpha-\beta}{4}}$.

178. $\frac{2\pi S.\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4}}$ и $\frac{2\pi S.\sin^2\frac{\beta}{4}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4}}$, если дуги не совпадают.

$\frac{2\pi S.\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$ и $\frac{2\pi S.\sin^2\frac{\beta}{4}}{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{4}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$, если дуги совпадают.

179. $2\pi S.\sin^2\frac{\alpha}{4}.\csc\alpha=5{,}0317$ кв. м.; $\pi S.\csc\frac{\alpha}{2}=320{,}97$ кв. м.

180. $\frac{3\sqrt{2}\,\pi d^3}{8\sin(\alpha-45^\circ)}$. 181. $x=109^\circ28'14''$; $250^\circ31'46''$.

182. $\frac{\pi a^3{}_n}{24\sin\frac{180^\circ}{n}.\cos^2\frac{90^\circ}{n}}$; $\frac{\pi a^2{}_n}{4\cos^2\frac{90^\circ}{n}}$. *Упр.* 1,0429 кб. м.,
2,2732 кв. м. 183. $\frac{\pi a^3{}_n.\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{n}}{16\cos^2\varphi}$, где $\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\frac{90^\circ}{n}.\operatorname{tg}30^\circ$.
Упр. 0,12595 кб. ед; 0,08598 кб. ед.

184. $\frac{\pi a^3{}_n}{24}.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\left(1+2\csc^2\frac{180^\circ}{n}\right)$. 185. $\frac{\pi a^2{}_n}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.\csc\frac{180^\circ}{n}$.

186. $r\sqrt[3]{\frac{m\cos^2\frac{\alpha}{2}}{(m+n)\cos^2\frac{\alpha}{4}}}$. 187. $r\left(1-\frac{2n}{m+n}\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)$.

188. $r\sqrt[3]{2\sin18^\circ.\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}}$, или $r\sqrt[3]{4\sin^218^\circ.\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}}$.

189. $\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{\frac{m}{n}}.\sin\frac{\alpha}{4}$. *Упр.* 30°; 18°35'24"; 13°36'.

190. 1) 40:11. 2) 16:5. **191.** 1) 8. 2) $\sin x=\frac{1}{3}$; $x=19°28'17"$.

192. $\frac{1}{24}\pi d^3\sqrt{2}.\operatorname{csec}^3\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$. **193.** $\frac{l^3.\sin 72°}{3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}$, $\frac{l^3.\sin 72°}{3\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}}$.

194. (См. № 109). $4\pi r^2.\cos^4\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)\sec^2\frac{\alpha}{4}$. *Упр.* 1) 7,294. 2) $\alpha=60°$; 3) $\alpha=38°56'33"$. **195.** $\frac{\pi R^2\sqrt{3}}{12}$; πR^2.

196. $\frac{128}{3}\pi R^3.\sin^6\left(45°+\frac{\alpha}{4}\right).\csc\alpha=69{,}916$ кб. м.

197. $8\pi a^3.\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\alpha$; $32\pi a^3\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$. **198.** $2\cos\alpha$.

199. $\frac{4}{3}\pi h^3\cos\alpha=45{,}738$ кб. м. **200.** $\frac{2}{3}\pi h^3\csc\alpha=4278{,}4$ кб. м.; $3\pi h^2.\sec^2\varphi.\csc\alpha=2143{,}15$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2}{3}\sin\frac{\alpha}{2}$. **201.** $18\pi R^3$; $36\pi R^2$. **202.** $2\pi l^3\sin^2\alpha$. **203.** $\frac{3}{4}\pi l^3$; $\frac{9}{8}\pi l^2\left(3+\sqrt{3}\right)$.

204. $\frac{\pi b^3}{3}.\frac{\sin\alpha.\cos(\alpha-45°)}{\sin^3(\alpha-45°)}=130{,}368$ кб. м.

205. $\frac{4}{3}\pi l^3\sin\alpha$. **206.** $\frac{1}{3}\pi b^3.\cos\alpha.\operatorname{ctg}\alpha=256{,}13$ кб. м.

207. $\frac{16}{3}\pi a^3\sin^3 2\alpha$. **208.** 21,7655 кб. м.; 81,288 кв м.

209. $\frac{\pi a^3.\cos(\alpha-\beta)}{3\cos\beta.\csc^2\alpha}=463$ кб. м. **210.** $\frac{\pi a^3.\sin^2\alpha.\cos\beta}{3\cos(\alpha+\beta)}=5409{,}25$ кб. м.

211. $\frac{b}{3}\operatorname{tg}\alpha$, или $\frac{2}{3}b\operatorname{tg}\alpha$. **212.** $9\pi r^3$. **213.** $\frac{1}{2}\pi d^3.\sin 2\alpha$; $2\pi d^2\sqrt{2}\cos(45°-\alpha)$. **214.** $\pi\sqrt{2}\,a^3\sin^{3/2}\alpha$. **215.** $\pi d^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

216. $0{,}5\pi d^3\sin\alpha$; $2\pi d^2$. **217.** $0{,}5\pi d^3\operatorname{tg}\alpha$; $2\pi d^2\sec\alpha$. **218.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

219. $\frac{\pi d^3}{2}.\cos\frac{\alpha}{2}.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=15{,}356$ кб. м., $2\pi d^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=43{,}097$ кв. м.

220. $24\pi a^2\sin\alpha$. **221.** $4\pi d^3\sin^2\alpha$. **222.** $\frac{1}{4}\pi d^3\operatorname{tg}^{3/2}\frac{\alpha}{2}$.

223. $\frac{2\pi d^3\sin^2\varphi}{3\sin 2\alpha}$, гдѣ $\cos\varphi=\sin^3\alpha$. *Упр.* 18,5π кб. м.

224. $\frac{4}{3}\pi a^3\operatorname{tg}^2\alpha$; $\frac{2\pi a^2.\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **225.** $\frac{2\left(1+\sin\alpha\right)}{\sin^2\alpha}$.

226. $8\pi R^2.\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\alpha}$, гдѣ $\sin\varphi=\frac{1}{2}\sin\alpha$. **227.** $\frac{1}{3}\pi R^3\sin(\alpha+\beta).(\sin\alpha+\sin\beta)$.

228. $8\pi R^3\csc\alpha$. **229.** $\pi a^2.\sec\alpha.\sec^2\varphi$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha.\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

230. $\frac{1}{8}\pi b^3\sec^2\alpha$. **231.** $4n\pi a^3\sin^2\frac{\alpha}{2}.\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)$.

232. $2\pi h^3.\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}=5023{,}1$ кб. м.

233. $\frac{1}{2}\pi a^3.\sin 2\alpha.\sec^2\varphi=78096$ кб. м., гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{3}.\cos\alpha$ или $\frac{1}{2}\pi a^3.\sin 2\alpha.\cos^2\varphi=44706$ кб. м., гдѣ $\sin^2\varphi=\frac{1}{3}.\cos\alpha$.

234. $\pi b^3.\operatorname{ctg}\alpha.\sec^2\varphi=54845$ кб. м., гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=\frac{1}{3}.\operatorname{ctg}\alpha$.

235. $\frac{2}{3}\pi b^3.\operatorname{tg}^2\alpha.\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **236.** $\frac{8}{3}\pi a^3.\sin^2\frac{\beta}{2}.\cos^2\frac{\beta}{2}$.

237. $\frac{\sin\alpha.\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$ или $\frac{\cos\beta.\cos^2\left(45°-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$

238. Разность разстояній осей вращенія равна трети разности высоть треугольника.

239. $\frac{4}{3}\pi r^3.\sin^3\frac{\alpha}{2}=0{,}24998$ кб. м.; $\frac{8\pi r^2.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{4}}=9{,}431$ кв. м.

240. $\frac{4}{3}\pi h^3.\operatorname{ctg}^3\alpha.\cos\alpha$; $8\pi h^2.\operatorname{ctg}^2\alpha.\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)$.

241. $\frac{\pi a^3}{6}.\cos\frac{\alpha}{2}=2{,}3954$ кб. м.; $\pi a^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}.\cos\frac{\alpha}{2}=22{,}976$ кв. м.

242. $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. **243.** $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$. **244.** $\frac{4}{3}\pi h^3.\frac{\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\sin^3\alpha}=70{,}62$ кб. м.; $\frac{\pi h^2.\sec^2\frac{\alpha}{2}}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}=25{,}803$ кв. м. **245.** $\frac{S}{6\sin\frac{\alpha}{2}}.\sqrt{\frac{S}{\pi}}=24{,}996$ кб. дм.; $S.\frac{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\varphi}=0{,}47987$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$. **246.** $\frac{4\pi S}{3\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{S.\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=$

$=8{,}5352$ кб. м.; $4\pi s.\dfrac{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi.\cos\frac{\alpha}{2}}=24{,}518$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

247. $\dfrac{\pi a^3}{6\sin^2\frac{\alpha}{2}}=0{,}15203$ кб. м.; $\dfrac{\pi a^2.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\varphi}=2{,}0773$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$. **248.** $\dfrac{\pi a^3.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}=56{,}824$ кб. м.; $\dfrac{\pi a^2.\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi.\sin\frac{\alpha}{2}}=$

$=94{,}07$ кв. м. гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$. **249.** $\dfrac{\pi a^3.\sec^2\frac{\alpha}{4}}{24\sin\frac{\alpha}{2}}=2{,}7246$ кб. м.

250. $\dfrac{\pi a^2.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\alpha}{4}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}.\cos\varphi}=11{,}109$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

251. $\frac{2}{3}\pi a^3.\dfrac{\sin^2\beta.\sin2\beta.\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^3\left(\frac{\alpha}{2}\mp\beta\right)}$. **252.** $2\pi a^2.\dfrac{\sin\beta.\sin2\beta.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi.\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\mp\beta\right)}$,

гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{2}$. *Упр.* $\dfrac{\pi a^3.\cos\beta}{6\sin^2\frac{\alpha}{2}}=23{,}352$ кб. м.; $\dfrac{\pi a^2.\cos\beta.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}.\sin\varphi}=$

$=60{,}619$ кв. м.; гдѣ $\operatorname{ctg}\varphi=2$. **253.** $\dfrac{\pi a^3}{12}.\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$, гдѣ $\cos(\alpha-x)=\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Упр. $\frac{3}{2}\pi a^3$. **254.** $\sin x=\dfrac{n}{n+2}$. **255.** $\sin x=\dfrac{1}{2n-3}$. **256.** $\dfrac{\pi a^3}{3}.\sin\alpha$.

257. $\dfrac{2\pi a^2.\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha.\cos^2\varphi}=10{,}005$ кв. м., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{6}.\sin\frac{\alpha}{2}$.

258. $\frac{4}{3}\pi R^3.\dfrac{\sin\frac{3\alpha}{2}.\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}=0{,}15248$ кб. дц. **259.** $4\pi R^2.\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\varphi}$,

гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{2}.\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}.\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. **260.** $\frac{4}{3}\pi R^3.\operatorname{tg}\alpha.\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

261. $\pi a^2.\dfrac{\sin2\alpha.\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\varphi.\sec\frac{\alpha}{2}}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=2$.

262. $\dfrac{\pi a^3.\operatorname{tg}^2\alpha.\sin(\varphi+\alpha)\sin(\varphi-\alpha)}{6\cos\alpha.\cos^2\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}^2\varphi=6$.

263. $\dfrac{\pi a^3}{3}.\dfrac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}=4{,}6636$ кб. м. **264.** 1) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$; 2) $\dfrac{4\pi R^3}{3\sqrt{5}}$.

265. $\frac{4}{3}\pi R^3.\cos^2\varphi=1{,}6021$ кб. м., гдѣ $\sin^2\varphi=\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

266. $\frac{4}{3}\pi R^3.\sin\frac{\alpha}{2}=16{,}018$ кб. м. **267.** $\frac{8}{3}\pi R^3.\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\varphi}{2}$,

гдѣ $\cos\varphi=\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4}$. **268.** $\frac{4}{3}\pi R^3.\cos\alpha.\sec^2\varphi=415{,}25$ кб. дц., гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{\sin\alpha}{2\sqrt{\cos\alpha}}$.

269. $x=40^\circ33'$. **270.** $\frac{4}{3}\pi R^3.\cos^2\varphi$, гдѣ $\sin\varphi=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{2}}$;

$\dfrac{2\pi R^2.\sin(\varphi+\alpha)}{\cos^2\alpha.\cos\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=2\cos\alpha$. **271.** $\frac{4}{3}\pi R^3.\dfrac{\cos^2\frac{3\alpha}{2}}{\cos^2\alpha}$, гдѣ $\cos^3=\cos^2\alpha$.

272. $n\pi a^3.\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}$. **273.** $\dfrac{\pi^2a^3}{2}\csc^3\frac{\alpha}{2}$. **274.** $\frac{8}{3}\pi R^3.\cos^3\frac{180^\circ}{n}$.

275. $\frac{1}{3}\pi a^3.\csc^3\frac{180^\circ}{n}$. **276.** $\frac{1}{4}\pi^2a^3.\cos^3\frac{\varphi}{2}.\csc^3\frac{\alpha}{2}$, гдѣ $\cos\varphi=\frac{4}{3\pi}$.

277. $\frac{1}{4}\pi^2a^3.\sin^2\frac{\varphi}{2}.\csc^3\frac{\alpha}{2}$, гдѣ $\cos\varphi=\frac{4}{3\pi}$.

278. 1) $2\pi^2a^2.\cos^2\frac{\varphi}{2}.\csc^2\frac{180^\circ}{n}$ 2) $2\pi^2a^2.\sin^2\frac{\varphi}{2}.\csc^2\frac{180^\circ}{n}$, гдѣ $\cos\varphi=\frac{1}{\pi}$.

279. $\frac{1}{2}\pi^2a^2\sec^2\alpha$; $2\pi^2a^2.\sec^2\alpha$. *Упр.* $\frac{7}{3}\pi a^3.\sec^3\alpha=8{,}2896$ кб. м.

280. $2\pi R^2.\dfrac{\sin(\alpha-\varphi)}{\cos\varphi}$, гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{n\alpha}{180^\circ}$. *Упр.* 1) $\pi R^2\left(1-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}\right)$;

$\pi R^2\sqrt{2}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$; $\pi R^2\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; $2\pi R^2$. 2) $\dfrac{\pi a^2.n.\sin\left(\frac{360^\circ}{n}-\varphi\right)}{2\sin^2\frac{180^\circ}{n}\cos\varphi}$,

гдѣ $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\pi}{n}$.

О тѣлахъ вращенія.

Если какая нибудь часть плоскости будетъ вращаться около прямой линіи, то тѣло, образованное этимъ вращеніемъ, называютъ *тѣломъ вращенія* или *круглымъ тѣломъ*, а прямую линію — *осью вращенія*. Каждая точка плоскости остается при вращеніи на неизмѣнномъ разстояніи отъ оси и, поэтому, описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ оси. Изъ простыхъ тѣлъ вращенія извѣстны: цилиндръ, конусъ и шаръ съ его частями. Но есть и другія тѣла, которыя получаются при вращеніи какой либо части плоскости около оси. Хотя опредѣленіе поверхностей и объемовъ этихъ тѣлъ и не представляетъ въ теоретическомъ отношеніи особенныхъ затрудненій, но желаніе избѣгнуть на практикѣ ряда сложныхъ выкладокъ, которыя всегда *обязательно* приводятъ къ крайне простому результату, заставляетъ замѣнить искомыя поверхности и объемы тѣлъ другими имъ равными, но, что самое главное, выражающимися очень просто. Это послѣднее обстоятельство особенно важно при рѣшеніи задачъ на вычисленіе поверхностей и объемовъ тѣлъ вращенія, но, къ сожалѣнію, въ общепринятыхъ учебникахъ Геометріи объ этомъ говорится очень мало; а между тѣмъ ясное и отчетливое представленіе о поверхностяхъ и объемахъ тѣлъ вращенія значительно расширяетъ кругозоръ ученика и, несомнѣнно, имѣетъ свое благотворное развивающее значеніе. Поэтому мы сочли не безполезнымъ изложить рядъ извѣстныхъ основныхъ предложеній, которыя даютъ возможность крайне просто опредѣлять поверхности и объемы тѣлъ вращенія. Легко понять, почему мы предпочли въ этомъ изложеніи индуктивный методъ: здѣсь частные случаи такъ просты, такъ наглядны для ученика, что переходъ къ опредѣленію болѣе сложныхъ будетъ очень легокъ. Условимся въ дальнѣйшемъ изложеніи значками S_{AB} и V_{ABC} означать соотвѣтственно: поверхность, описанную прямою AB, и объемъ, описанный фигурою ABC. Кромѣ того предполагается, что ось лежитъ въ плоскости вращаемой фигуры.

А. Поверхности.

Предложеніе I. *Если прямоугольный* $\triangle ABC$ *вращается около катета* AC, *то* $S_{BC}=2\pi OD.AC$, *гдѣ* OD *есть перпендикуляръ, возставленный изъ средины* D *гипотенузы* BC *до встрѣчи съ катетомъ* AC *въ точкѣ* O.

Фиг. 1.

Доказательство. Выраженіе боковой поверхности конуса, образованнаго вращеніемъ прямоугольнаго $\triangle ABC$ около катета AC (фиг. 1),

$$S_{BC}=\pi.AB.BC=2\pi.AB.CD$$

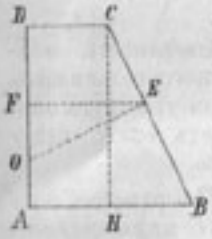
можетъ быть преобразовано въ выраженіе

$$S_{BC}=2\pi OD.AC,$$

если замѣтить, что $\triangle\triangle$ ABC и CDO подобны, а изъ подобія ихъ слѣдуетъ

$$AB.CD=OD.AC.$$

Предложеніе II. *Если прямоугольная трапеція* $ABCD$ *вращается около меньшаго бока* AD, *то* $S_{BC}=2\pi OE.AD$, *гдѣ* OE *есть перпендикуляръ, возставленный изъ средины* E *бока* BC *до встрѣчи съ* AD *въ точкѣ* O.



Фиг. 2.

Доказательство. Выраженіе боковой поверхности усѣченнаго конуса, образованнаго вращеніемъ прямоугольной трапеціи $ABCD$ около бока AD (фиг. 1),

$$S_{BC}=2\pi EF.BC,$$

гдѣ EF радіусъ средняго круга, можетъ быть преобразовано въ выраженіе

$$S_{BC}=2\pi OE.AD,$$

если замѣтить, что $\triangle\triangle$ OEF и CHB подобны ($CH\perp AB$), а изъ подобія ихъ слѣдуетъ

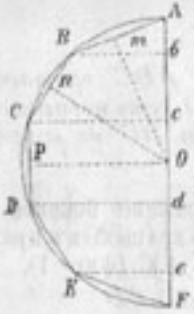
$$EF.BC=OE.CH \text{ или } EF.BC=OE.AD.$$

Предложеніе III. *Поверхность, описанная правильной ломанной линіей, вращающейся около діаметра круга описаннаго, равна произведенію окружности, вписанной въ ломанную линію, на проэкцію послѣдней на ось вращенія.*

Доказательство. Пусть (фиг. 3) Ab, bc, cd, de, eF суть проэкціи равныхъ отрѣзковъ AB, BC, CD, DE и EF ломанной линіи $ABCDEF$ на діаметръ круга описаннаго AF, а $Om=On=Oj=r$, радіусу круга, вписаннаго въ ломанную линію; одинъ изъ отрѣз-

конъ CD параллеленъ оси. Тогда на основаніи предыдущихъ предложеній имѣемъ

$$S_{\text{АВСDEF}}=S_{\text{АВ}}+S_{\text{ВС}}+S_{\text{CD}}+S_{\text{DE}}+S_{\text{EF}}=$$
$$=2\pi r.(Ab+bc+cd+de+eF)=2\pi r.AF.$$

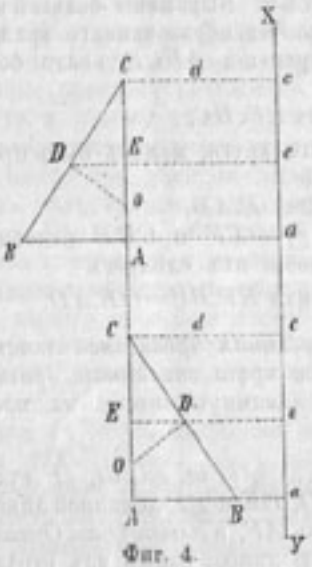


Фиг. 3.

Слѣдствіе 1. Если правильная ломанная линія вписана въ полуокружность радіуса R и число ея сторонъ будетъ увеличиваться неопредѣленно, то она будетъ приближаться неопредѣленно къ полуокружности, а перпендикуляры $Om=On=Op=r$ къ R и тогда поверхность, описываемая ломанной линіей, будетъ величиною перемѣнной, предѣлъ которой будетъ *поверхность шара*. А потому поверхность шара будетъ $2\pi R.2R$ т. е. $4\pi R^2$.

Слѣдствіе 2. Замѣчая, что $S_{\text{ADCD}}=2\pi r.Ad$, нетрудно понять, что поверхность, описанная дугою круга радіуса R, вращающейся около діаметра, проходящаго черезъ ея конецъ, будетъ $2\pi R.H$, гдѣ H—проэкціи хорды, стягивающей дугу, на ось вращенія. Эта поверхность называется *поверхностью шарового сегмента*, а H—его высотою.

Слѣдствіе 3. Замѣчая, что $S_{\text{BCD}}=2\pi r.bd$, нетрудно понять, что поверхность, описанная дугою круга радіуса R, вращающейся около діаметра не пересѣкающаго ее, будетъ $2\pi R.H$, гдѣ H—проэкція на ось вращенія хорды, стягивающей дугу. Эта поверхность называется *поверхностью шарового пояса*, а H—его высотою.



Фиг. 4.

Слѣдствіе 4. Поверхность, описанная правильнымъ многоугольникомъ, вращающимся около діаметра круга описаннаго радіуса R, будетъ $4\pi rR$, гдѣ r апоѳема многоугольника.

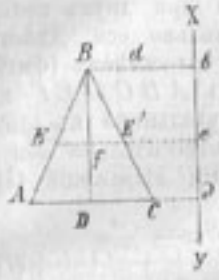
Предложеніе IV. *Поверхность, описанная гипотенузою BC прямоугольнаго $\triangle ABC$ около оси xy, параллельной катету AC и находящейся отъ него на разстояніи d, будетъ $S_{BC}=2\pi BC.(d\pm DE)$, гдѣ DE длина линіи, соединяющей середины гипотенузы BC и катета AC.*

Дѣйствительно, при двухъ положеніяхъ $\triangle ABC$ относительно оси имѣемъ (фиг. 4)

$$S_{\text{Bc}}=2\pi BC.De=2\pi BC(d\pm DE).$$

Замѣчаніе. Полученное выраженіе поверхности можно представить въ другомъ видѣ. Проведя изъ точки D перпендикуляръ DO до встрѣчи съ катетомъ AC въ точкѣ O, изъ подобія $\triangle\triangle$ ABC и ODE найдемъ

$$BC.DE=DO.AC \text{ или } BC.DE=DO.ac, \text{ а потому}$$
$$S_{\text{BC}}=2\pi BCd\pm 2\pi DO.\ ac. \text{ (I).}$$



Фиг. 5.

Слѣдствіе. *Поверхность, описанная равными боками равнобедреннаго $\triangle ABC$, вращающагося около оси, параллельной высотѣ и не пересѣкающей сторонъ треугольника, равна произведенію окружности круга, у котораго радіусъ равенъ разстоянію оси до высоты, на двойную длину бока.*

Дѣйствительно (фиг. 5) $S_{\text{AB}}+S_{\text{BC}}=$
$2\pi AB.(d+Ef)+2\pi BC.\ (d-Ef)=$
$=2\pi d.2AB$, ибо $Ef=Ef$.

Предложеніе V. *Поверхность, описанная бо́льшимъ бокомъ BC прямоугольной трапеціи $ABCD$ около оси xy, параллельной меньшему боку AD и находящейся отъ него на разстояніи $Aa=d$, будетъ $2\pi BC.\ (d\pm\pm EF)$, гдѣ EF средняя линія трапеціи.*

Фиг. 6.

Дѣйствительно, при двухъ положеніяхъ трапеціи относительно оси имѣемъ (фиг. 6)

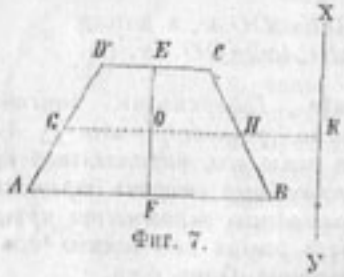
$$S_{\text{BC}}=2\pi BC.Ef=2\pi BC(d\pm EF).$$

Замѣчаніе. Полученное выраженіе поверхности можно представить въ другомъ видѣ. Проведя изъ точки E перпендикуляръ EO до встрѣчи съ AD въ точкѣ O, а изъ C линію $CH\parallel AD$, изъ подобія $\triangle\triangle$ OEF и BCH найдемъ $BC.EF=EO.CH$ или $BC.EF=EO.\ ad$, а потому

$$S_{\text{BC}}=2\pi BCd\pm 2\pi EO.ad \text{ (II).}$$

Слѣдствіе. *Поверхность, описанная равными боками равнобочной трапеціи, вращающейся около оси, параллельной ея высотѣ и не пересѣкающей ея сторонъ, равна произведенію окружности круга, у котораго радіусъ равенъ разстоянію середины основаній до оси, на двойную длину бока.*

Дѣйствительно, $S_{AD}+S_{BC}=2\pi AD.(OK+OG)+2\pi CB.(OK-OH)=$
$=2\pi d.2AD$, ибо $OK=d$, а $OG=OH$ (фиг. 7); GH—медіана трапеціи.

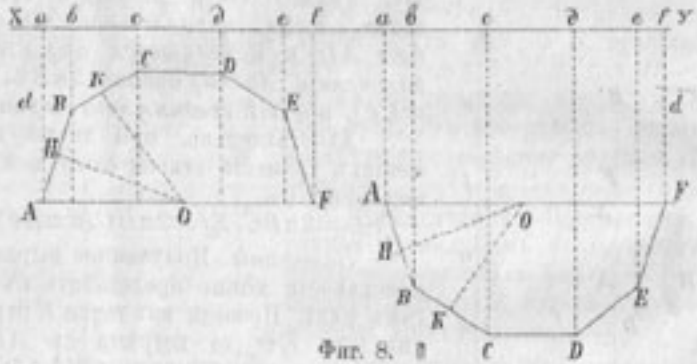


Фиг. 7.

Предложенія IV и V даютъ возможность опредѣлить *поверхности, описанныя полупериметромъ правильнаго n—угольника и полуокружностью* при двухъ положеніяхъ относительно оси. Дѣйствительно, если мы имѣемъ (фиг. 8) полупериметръ $ABCDEF$ правильнаго n—угольника въ двухъ положеніяхъ относительно оси xy, то на основаніи выраженій (I) и (II) найдемъ

$$S_{ABCDEF}=S_{AB}+S_{BC}+S_{CD}+S_{DE}+S_{EF}=$$
$$=2\pi d(AB+BC+CD+DE+EF)=2\pi OH.(ab+bc+cd+de+ef);$$

откуда $S_{ABCDEF}=2\pi d.p=2\pi r.2R$ (3), гдѣ p означаетъ полупериметръ, r—апоѳему, а R—радіусъ круга, описаннаго около n—угольника.



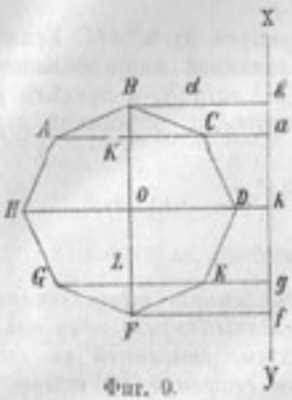
Фиг. 8.

Переходя отъ вращенія полупериметра n—угольника къ вращенію полуокружности, обращенной выпуклостью 1) въ сторону противоположную оси 2) къ оси, надо, очевидно, положить $p=\pi R$, $r=R$; тогда для поверхности будемъ имѣть выраженіе

$$2\pi^2dR=4\pi R^2 \quad \text{(III)},$$

гдѣ d, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, есть разстояніе діаметра до оси вращенія.

На основаніи слѣдствій предложеній IV и V легко понять, что *поверхность, описанная периметромъ правильнаго n—угольника, вращающагося около оси параллельной діаметру круга описаннаго, равна произведенію его периметра на окружность круга, у котораго радіусъ равенъ разстоянію центра n—угольника до оси.*



Фиг. 9.

Дѣйствительно (фиг. 9), искомая поверхность состоитъ изъ поверхностей, описанныхъ равными боками равнобедренныхъ треугольниковъ (напр. ABC и GEF) и трапецій (напр. $ACDH, HDGE$), а потому

$S_n=2\pi d.(2BC+2CD+2DE+2EF)=$
$=2\pi d.P$, гдѣ P—периметръ n—угольника.

Выраженіе этой поверхности, называемой поверхностью *многограннаго кольца*, можно получить также изъ формулы (3); дѣйствительно

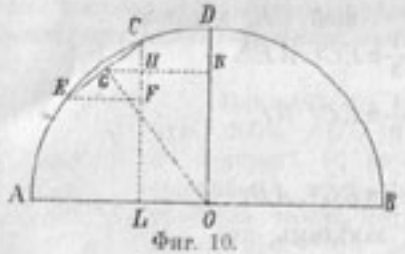
$$S_n=S_{BABOP}+S_{BCDEK}=$$
$$=(2\pi d.p+2\pi r.2R)+(2\pi d.p-2\pi r.2R)=$$
$$=2\pi d.P, \text{ гдѣ } P=2p.$$

Переходя отъ вращенія n—угольника къ вращенію окружности, надо очевидно, положить $P=2\pi R$, гдѣ R—радіусъ круга и тогда для поверхности получимъ выраженіе

$$2\pi d.2\pi R$$

т. е. *поверхность, описанная кругомъ около оси, вмѣ его лежащей, будетъ равна произведенію длины окружности данною круга на длину той окружности, которую описываетъ центръ около той же оси.* Эта поверхность называется поверхностью *круглаго кольца*. Наконецъ, опредѣлимъ *поверхность, описываемую дугою, которая вращается около перпендикуляра, опущеннаго изъ конца дуги на діаметръ, проходящій черезъ начало ея.*

Впишемъ въ дугу AC (фиг. 10) правильную ломанную линію и пусть одна ея сторона CE, проэкція ея на ось вращенія CL есть CF, длина перпендикуляра, опущеннаго изъ середины G на ось, есть GH, длина перпендикуляра, опущеннаго на радіусъ OD параллельный оси CL, есть GK, а разстояніе между осью и радіусомъ $HK=d$. Тогда поверхность, описанная одной стороной CE, будетъ



Фиг. 10.

$$S_{CE}=2\pi GH.CE=2\pi.CE(GK-d)=2\pi CE.GK-2\pi CE.d.$$

Изъ подобія $\triangle\triangle$ CFE и GKO имѣемъ $GK.CE=CF.GO$,
а потому $\quad S_{CE}=2\pi GO.CF-2\pi d.CE.$

Складывая подобныя выраженія для поверхностей, описанныхъ всѣми сторонами правильной ломанной линіи, получимъ по-

верхность, описанную правильной ломанной линіей, въ видѣ

$$2\pi GO.CL — 2\pi d.p,$$

гдѣ p периметръ ломанной линіи, R—радіусъ дуги AC. Если же предположимъ, что стороны вписанной ломанной линіи безконечно уменьшаются и замѣтимъ, что предѣлъ GO есть R, а предѣлъ p—дуги AC, получимъ выраженіе для поверхности, описанной дугою AC около перпендикуляра CL, въ видѣ

$$2\pi R.CL — 2\pi d.\smile AC.$$

B. Объемы.

Предложеніе VI. *Объемъ тѣла, описаннаго треугольникомъ, который вращается около прямой, проходящей чрезъ одну изъ его вершинъ, равенъ произведенію поверхности, описанной въ этомъ вращеніи противолежащей этой вершинѣ стороной, на треть высоты, соотвѣтствующей этой сторонѣ.*

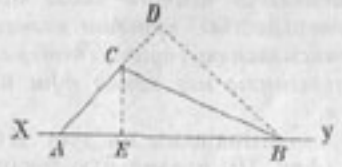
Здѣсь можетъ быть три случая.

I. Ось xy проходитъ черезъ двѣ вершины.

II. Ось xy проходитъ черезъ одну вершину.

III. Ось xy проходитъ черезъ вершину параллельно противоположной сторонѣ.

I.



Фиг. 11.

Пусть $\triangle ABC$ вращается около AB; проведя изъ вершины C перпендикуляръ CE, замѣтимъ, что $\triangle ABC$ опишетъ два конуса, у которыхъ вершины будутъ въ точкахъ A и B, а общее основаніе будетъ кругъ, описанный линіей CE; а потому

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi EC^2.AE$$

$$V_{ECB}=\frac{1}{3}\pi EC^2.BE,$$

откуда, складывая, найдемъ

$$V_{ABC}=\frac{1}{3}\pi EC^2.AB.$$

Проведя перпендикуляръ BD, замѣтимъ, что

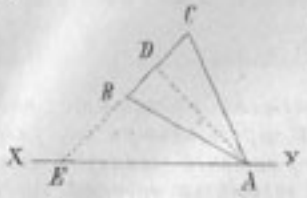
$$EC.AB=AC.BD,$$

а потому $V_{ABC}=\pi.EC.AC.\frac{BD}{3}$

Замѣчая же, что $\pi.EC.AC=S_{AC}$ т. е. поверхности, описанной гипотенузою AC около оси AE, найдемъ

$$V_{ABC}=S_{AC}.\frac{BD}{3}.$$

II.



Фиг. 12.

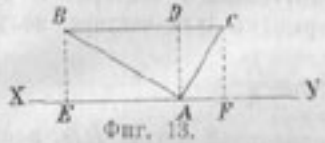
Продолживъ сторону BC до встрѣчи съ осью xy въ точкѣ E, найдемъ по предыдущему

$$V_{ACE}=S_{CE}.\frac{AD}{3}$$

$$V_{ABE}=S_{BE}.\frac{AD}{3}$$

откуда, вычитая, найдемъ $V_{ABC}=S_{BC}.\frac{AD}{3}$.

III.



Фиг. 13.

Проведя изъ вершинъ B и C перпендикуляры BE и CF на ось xy, а изъ A высоту AD, замѣтимъ, что

$$V_{BCFE}=\pi.AD^2.BC. \quad (1)$$

$$V_{AEB}+V_{ACF}=\frac{\pi.AD^2}{3}(BD+DC)=\pi.AD^2.\frac{BC}{3} \quad (2),$$

вычтя же (2) изъ (1), найдемъ

$$V_{ABC}=2\pi.AD.BC.\frac{AD}{3}.$$

Но $2\pi.AD.BC=S_{BC}$, а потому $V_{ABC}=S_{BC}.\frac{AD}{3}$.

Предложеніе VII. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сектора около діаметра, равенъ произведенію поверхности, описанной при этомъ вращеніи дугою сектора, на треть радіуса сектора.*

Фиг. 14.

Впишемъ въ дугу BCD правильную ломанную линію BCD и соединимъ точки B, C и D съ центромъ O, изъ серединъ сторонъ BC, CD возставимъ перпендикуляры OE, OH; всѣ они пройдутъ черезъ центръ O и будутъ равны между собою; пусть эти перпендикуляры будутъ h. Затѣмъ будемъ вращать, такъ называемый, многоугольный секторъ $OBCD$ около діаметра AF. Онъ опишетъ тѣло, состоящее изъ тѣлъ, описанныхъ треугольниками BOC, COD. Но ранѣе мы имѣли, что

$$V_{BOC}=S_{BC}.\frac{h}{3},\quad V_{COD}=S_{CD}.\frac{h}{3}.$$

Сложивъ эти равенства, найдемъ

$$V_{\text{сбсD}}=S_{\text{BCD}}.\frac{h}{3},$$

т. е. *объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ правильнаго многоугольнаго сектора около оси, проходящей черезъ центръ его, равенъ произведенію поверхности, описанной правильной ломанной линіей (основаніемъ многоугольнаго сектора) на треть ея апоѳемы.*

Если же число сторонъ ломанной линіи будетъ увеличиваться, то круговой секторъ будетъ предѣломъ для многоугольнаго сектора и объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сектора (такъ называемый *полый шаровой секторъ*), служитъ предѣломъ для тѣла, образованнаго вращеніемъ многоугольнаго сектора. А потому въ предѣлѣ, полагая $h=R$, гдѣ R—радіусъ дуги сектора, получимъ

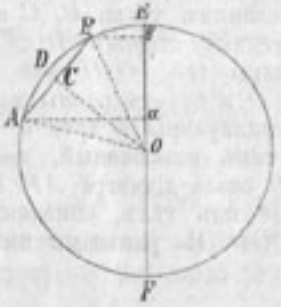
$$V_{\text{сект. BOD}}=S_{\smile\text{BD}}.\frac{R}{3}.$$

Опредѣленіе же поверхности, описанной дугою BD, извѣстно изъ предыдущихъ предложеній.

Замѣчаніе. Очевидно, что это предложеніе имѣетъ также мѣсто и для того случая, когда діаметръ (ось вращенія) проходитъ черезъ конецъ дуги сектора. Въ этомъ случаѣ дуга сектора опишетъ поверхность шарового сегмента; тогда какъ въ предыдущемъ самомъ общемъ случаѣ дуга BD опишетъ поверхность шарового пояса.

Если-же круговой секторъ, описавшій шаровой секторъ, будетъ полукругъ, то онъ опишетъ объемъ цѣлаго шара.

Предложеніе VIII. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ кругового сегмента около діаметра, не пересѣкающаго сегмента, равенъ шестой части объема цилиндра, у котораго радіусомъ основанія служитъ хорда сегмента, а высотою—проэкція этой хорды на ось вращенія.*



Фиг. 15.

Доказательство. Пусть діаметръ $EF=2R$ служитъ осью вращенія кругового сегмента ADB; проэкція хорды AB на ось есть ab, а перпендикуляръ изъ центра O на хорду AB есть CO. Площадь сегмента при этомъ вращеніи опишетъ тѣло, имѣющее видъ кольца, объемъ котораго, очевидно, равенъ объему полаго шарового сектора, образованнаго вращеніемъ кругового сектора AOB, безъ объема тѣла, образованнаго вращеніемъ $\triangle\ AOB$ т. е.

$$V_{\text{сегм. ADB}}=V_{\text{сек. AOB}}-V_{\text{треуг. AOB}}.$$

Но такъ какъ $V_{\text{сек. AOB}}=S_{\smile\text{AB}}.\frac{R}{3}=\frac{2}{3}\pi R^2.ab,$

а $$V_{\text{треуг. AOB}}=S_{\text{AB}}.\frac{OC}{3}=(2\pi.OC.ab.)\frac{OC}{3}=\frac{2}{3}\pi.OC^2.ab,$$

то $$V_{\text{сегм. ADB}}=\frac{2}{3}\pi.ab.(R^2-OC^2);$$

замѣчая изъ построенія, что $R^2-OC^2=AC^2=\frac{AB^2}{4}$, искомый объемъ тѣла выразимъ въ видѣ

$$V_{\text{сегм. ADB}}=\frac{1}{6}\pi.AB^2.ab.$$

Предложеніе IX. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ прямоугольной трапеціи около оси, лежащей внѣ ея параллельно меньшему боку, равенъ суммѣ или разности объемовъ: 1) призмы, у которой площадь основанія равна площади трапеціи, а высота длинѣ окружности круга съ радіусомъ равнымъ разстоянію оси отъ меньшаго бока и 2) усѣченнаго конуса, образованнаго вращеніемъ той-же трапеціи около меньшаго бока.*

Фиг. 16.

Доказательство. Пусть стороны данной прямоугольной трапеціи $ABCD$ суть $AB=b$, $CD=a$, $AD=h$ и ось xy параллельная меньшему боку AD находится отъ него на разстояніи $DE=d$ въ двухъ положеніяхъ трапеціи относительно оси. Очевидно, объемъ тѣла вращенія при первомъ положеніи трапеціи будетъ равенъ разности объемовъ усѣченнаго конуса, образованнаго вращеніемъ трапеціи $BCEF$, и цилиндра, образованнаго вращеніемъ прямоугольника $ADEF$ около той же оси. Слѣдовательно

$$V_{\text{ABCD}}=\frac{\pi h}{3}\Big((a+d)^2+(b+d)^2+(a+d)(b+d)\Big)-\pi d^2h$$

или $$V_{\text{ABCD}}=\pi dh(a+b)+\frac{\pi h}{3}(a^2+b^2+ab).$$

Означая площадь трапеціи черезъ S и замѣчая, что $h(a+b)=2S$, получимъ

$$V_{\text{ABCD}}=S.2\pi d+\frac{\pi h}{3}(a^2+b^2+ab)\quad(1)$$

При второмъ положеніи трапеціи, очевидно, объемъ тѣла вращенія будетъ

$$V_{ABCD}=S.\,2\pi d-\frac{\pi k}{3}(a^2+b^2+ab)\quad(2),$$

что и доказываетъ изложенное предложеніе.

Слѣдствіе. Если положить $a=0$, то по формуламъ (1) и (2) можно получить выраженіе для объема тѣла, образованнаго вращеніемъ прямоугольнаго $\triangle ABD$ около оси, параллельной его катету h и находящейся отъ него на разстояніи d, въ такомъ видѣ

$$V_{ABD}=S.2\pi d\pm\frac{\pi b^2 k}{3}\quad(3),$$

гдѣ S означаетъ площадь этого треугольника.

Слѣдствіе. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ равнобедреннаго треугольника около оси, параллельной высотѣ и не пересѣкающей стороны треугольника, равенъ объему призмы, у которой основаніе есть площадь даннаго треугольника, а высота равна окружности круга съ радіусомъ равнымъ разстоянію оси до высоты треугольника.*

Дѣйствительно (см. фиг. 5) на основаніи формулы (3) имѣемъ

$$V_{ABD}=S.2\pi d+\frac{\pi AD^2.BD}{3}$$

$$V_{BDC}=S.2\pi d-\frac{\pi.DC^2.BD}{3},$$

откуда $$V_{ABC}=2S.2\pi d=пл.\ ABC.2\pi d.$$

Слѣдствіе. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ равнобочной трапеціи около оси, параллельной ея высотѣ и не пересѣкающей ея сторонъ, равенъ объему призмы, у которой основаніе есть площадь данной трапеціи, а высота равна окружности круга съ радіусомъ равнымъ разстоянію оси до середины основаній трапеціи.*

Дѣйствительно (см. фиг. 7) на основаніи формулъ (1) и (2) легко убѣдиться въ справедливости высказаннаго.

Предложеніе X. *Объемъ тѣла, образованнаго вращеніемъ правильнаго n—угольника около оси, параллельной одному изъ діаметровъ круга описаннаго, равенъ объему призмы, у которой основаніе есть площадь даннаго n—угольника, а высота равна окружности круга съ радіусомъ равнымъ разстоянію центра n—угольника до оси.*

Дѣйствительно, проведя (см. фиг. 9) черезъ каждыя двѣ противоположныя вершины хорды AC, HD, GE, перпендикулярныя къ діаметру BF, мы раздѣлимъ правильный n—угольникъ на два равнобедренныхъ треугольника и рядъ равнобочныхъ трапецій (прямоугольникъ, если онъ получится, для общности можно

разсматривать, какъ частный видъ трапеціи). Слѣдовательно искомый объемъ состоитъ изъ объемовъ тѣлъ, образованныхъ вращеніемъ равнобедренныхъ треугольниковъ и равнобочныхъ трапецій, и потому на основаніи предыдущаго выразится въ видѣ

$$V_n=S_n.2\pi d\quad(4),$$

гдѣ S_n означаетъ площадь n—угольника. Это тѣло вращенія называется *многограннымъ кольцомъ*.

Если же предположить, что стороны многоугольника безконечно уменьшаются, въ предѣлѣ получимъ кругъ, а потому объемъ тѣла отъ вращенія круга радіуса R около оси, внѣ его лежащей на разстояніи d отъ центра, выразится въ видѣ

$$V=\pi R^2.2\pi d.\quad(5),$$

т. е. Этотъ объемъ равновеликъ объему цилиндра, у котораго основаніе есть площадь даннаго круга, а высота равна длинѣ окружности круга съ радіусомъ равнымъ разстоянію центра круга до оси. Это тѣло вращенія называется круглымъ кольцомъ.

Замѣчаніе. Изъ формулъ (1) и (2) не трудно убѣдиться, что *разность между объемами тѣлъ, образованныхъ вращеніемъ трапеціи въ двухъ положеніяхъ, равна двойному объему тѣла, образованнаго вращеніемъ трапеціи около стороны $AD=h$.* А потому, перейдя къ вращенію правильнаго n—угольника и означая его апоѳему черезъ r, легко найти, что *разность между объемами внѣшней и внутренней части многограннаго кольца будетъ*

$$\frac{8}{3}\pi r^2 R,$$

т. е. равна двойному объему тѣла, образованнаго вращеніемъ n—угольника около діаметра.

Точно также не трудно уже убѣдиться, что *разность между объемами внѣшней части и внутренней части круглаго кольца будетъ*

$$\frac{8}{3}\pi R^3,$$

т. е. равна двойному объему шара, образованнаго вращеніемъ даннаго круга около діаметра.

Поэтому для опредѣленія объемовъ V_1 и V_2 внѣшней и внутренней частей круглаго кольца имѣемъ уравненія:

$$V_1+V_2=\pi R^2.2\pi d$$

$$V_1-V_2=\frac{8}{3}\pi R^3,$$

откуда

$$V_1=\frac{\pi R^2}{3}(3\pi d+4R)$$

$$V_2=\frac{\pi R^2}{3}(3\pi d-4R),$$

и выпуклыя поверхности этихъ колецъ были опредѣлены формулой (III).